

# 6

曹定阵 周学圣 编注  
郭大为 高品琼 主审

Б.П.吉米多维奇

# 数学分析

## 习题集题解

第四版



山东科学技术出版社  
[www.lkj.com.cn](http://www.lkj.com.cn)

责任编辑 宋 涛 邱 蕾

封面设计 庞 婕 孙 佳

## 新版推荐

# 经典 B. П. 吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解（共六册）

1 分析引论

定价：19.00元

2 单变量函数的微分学

定价：19.00元

3 不定积分 定积分

定价：20.00元

4 级数

定价：19.00元

5 多变量函数的微分法 带参数的积分

定价：22.00元

6 重积分和曲线积分

定价：19.00元

数学分析习题集精选精解

定价：39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案

定价：39.00元

高等数学习题精选精解

定价：39.80元

ISBN 978-7-5331-5895-8



9 787533 158958

定价：19.00 元



# 6

费定晖 周学圣 编演  
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇  
**数学分析**  
习题集题解

第四版

● 山东科学技术出版社

**图书在版编目 (CIP) 数据**

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 6/费定晖, 周学圣编演. —4 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2012  
ISBN 978-7-5331-5895-8

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校 题解 IV. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120112 号

**Б. П. 吉米多维奇  
数学分析习题集题解 6**

---

**出版者: 山东科学技术出版社**

地址: 济南市玉函路16号  
邮编: 250002 电话: (0531) 82098088  
网址: [www.lkj.com.cn](http://www.lkj.com.cn)  
电子邮件: [slkj@sdpress.com.cn](mailto:slkj@sdpress.com.cn)

**发行者: 山东科学技术出版社**

地址: 济南市玉函路16号  
邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

**印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂**

地址: 潍坊市潍州路753号  
邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

---

开本: 787 mm × 1092 mm 1/16

印张: 13.5

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

---

**ISBN 978-7-5331-5895-8**

**定价: 19.00 元**



# 第四版前言

---

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学習过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学



# 出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思考的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南



# 目录

---

第八章 多重积分和曲线积分 .....	1
§ 1. 二重积分 .....	1
§ 2. 面积的计算法 .....	27
§ 3. 体积的计算法 .....	35
§ 4. 曲面面积的计算法 .....	44
§ 5. 二重积分在力学上的应用 .....	49
§ 6. 三重积分 .....	58
§ 7. 利用三重积分计算体积 .....	67
§ 8. 三重积分在力学上的应用 .....	76
§ 9. 二重和三重广义积分 .....	86
§ 10. 多重积分 .....	106
§ 11. 曲线积分 .....	117
§ 12. 格林公式 .....	135
§ 13. 曲线积分在物理学上的应用 .....	146
§ 14. 曲面积分 .....	155
§ 15. 斯托克斯公式 .....	165
§ 16. 奥斯特罗格拉茨基公式 .....	169
§ 17. 场论初步 .....	182

# 第八章 多重积分和曲线积分

## § 1. 二重积分

1° 二重积分的直接算法 所谓连续函数  $f(x, y)$  在有限封闭可求积二维区域  $\Omega$  上的二重积分, 指的是

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ , 而求和是对所有使  $(x_i, y_j) \in \Omega$  的那些  $i, j$  值进行的.

若区域  $\Omega$  由以下不等式给出:

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

其中  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 则相应的二重积分可按以下公式来计算:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2° 二重积分中的变量代换 若连续可微函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

给出平面  $Oxy$  上的有限闭区域  $\Omega$  与平面  $Ouv$  上的区域  $\Omega'$  之间的一一映射, 且雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

的符号在  $\Omega$  内保持不变(可能在零测度集上有例外), 则成立以下公式:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f[x(u, v), y(u, v)] |I| du dv.$$

例如, 根据公式  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  变换为极坐标  $r$  和  $\varphi$  时, 有

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

【3901】 把积分  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$  当作积分和的极限, 用直线

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算此积分.

解 由于

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$$

故  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy = \frac{1}{4}.$

【3902】 用直线

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

把区域  $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$  分为许多矩形. 作出函数  $f(x, y) = x^2 + y^2$  在此区域内的下积分和  $\underline{S}$  与上积分和  $\overline{S}$ . 当  $n \rightarrow \infty$  时, 上积分和与下积分和的极限等于什么?

解 下积分和  $\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left( 1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \right\}$

$$= \frac{2n}{n^2} \left[ n + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n + \frac{4}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j + \frac{4}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right] = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

其中  $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$

而上积分和  $\bar{S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \right\} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\underline{S}$  与  $\bar{S}$  的极限均等于  $\frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}.$

**【3903】** 用一组顶点  $A_0$  位于整数点的正方形作为积分域的近似域, 并取被积函数在每个正方形距原点最远的顶点之值, 近似地计算积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$  并与精确值加以比较.

**解** 由题意知, 应取的正方形顶点为  $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3),$  故利用对称性知

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \\ &\approx 0.196 + 0.371 + 0.343 + 0.312 + 0.177 + 0.329 + 0.302 + 0.154 + 0.285 \approx 2.470, \end{aligned}$$

即  $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \approx 9.880.$

下面计算积分的精确值:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = 4 \int_0^5 \ln(y + \sqrt{24+x^2+y^2}) \Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx = 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx - 2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx.$$

由于  $\int \ln(24+x^2) dx = x \ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2} dx = x \ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{24}} + C.$

从而,  $2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx = \left[ 2x \ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{24}} \right] \Big|_0^5 = 20 \ln 7 - 20 + 8\sqrt{6} \arctan \frac{5}{\sqrt{24}};$

又  $4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx = 4 \left[ x \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) \right] \Big|_0^5 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}}$   
 $= 20 \ln 7 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}},$

再令  $x = 5 \sin t$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25 \cos^2 t + 25}{5 \cos t + 7} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos t - 7) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5 \cos t + 7} dt \\ &= (7t - 5 \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24 \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \tan \frac{t}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6} \arctan \frac{2}{\sqrt{24}}. \end{aligned}$$

从而,  $4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx = 20 \ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6} \arctan \frac{2}{\sqrt{24}}.$

注意到  $2 \arctan \frac{2}{\sqrt{24}} + \arctan \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$

最后便得到  $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = 14\pi - 4\sqrt{24} \left( 2 \arctan \frac{2}{\sqrt{24}} + \arctan \frac{5}{\sqrt{24}} \right) = 2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13.19.$

将精确值与近似值作比较, 显见误差较大, 其原因在于有不少不是正方形的区域都被忽略, 因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差  $\frac{4.31}{13.19} \approx 32.7\%.$

**注意** 求  $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$  的精确值若采用极坐标则较为简单:



$$\iint_{x^2+y^2 \leq 24} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{24}} \frac{r dr}{\sqrt{24+r^2}} = 2\pi(7 - \sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排,似应在 3937 题以后才开始使用极坐标,故本题仍用直角坐标进行计算.

**【3904】** 用直线  $x=\text{常数}$ ,  $y=\text{常数}$ ,  $x+y=\text{常数}$  把积分域  $S$  分为四个相同的三角形,并取被积函数在每个三角形的质心之值,近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS.$$

其中  $S$  是以直线  $x=0$ ,  $y=0$  及  $x+y=1$  为边的三角形.

**解** 我们只须以  $x=\frac{1}{2}$ ,  $y=\frac{1}{2}$  及  $x+y=\frac{1}{2}$  分积分域  $S$ , 即得四个相同的三角形, 它们的面积均为  $\frac{1}{8}$ , 质心为  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$  及  $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$ , 于是, 得此积分的近似值为

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS \approx \frac{1}{8} \left( \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} \right) \approx \frac{1}{8} (0.577 + 0.816 + 2 \cdot 0.912) \approx 0.402,$$

其精确值为  $\iint_S \sqrt{x+y} dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2}{5} = 0.4.$

**【3905】** 把积分域  $S: \{x^2+y^2 \leq 1\}$  分为有限个直径小于  $\delta$  的可求积的子区域  $\Delta S_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 怎样的值  $\delta$  能保证不等式

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$$

成立? 其中  $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ .

**解** 记函数  $\sin(x+y)$  在  $\Delta S_i$  中的振幅为  $\omega_i$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} [\sin(x+y) - \sin(x_i+y_i)] dS \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} |\sin(x+y) - \sin(x_i+y_i)| dS \leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i. \end{aligned}$$

由于积分域  $S: \{x^2+y^2 \leq 1\}$  的面积等于  $\pi$ , 故只要  $\omega_i < \frac{0.001}{\pi}$ , 便能满足原不等式的要求. 但因为

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} |\sin(x' + y') - \sin(x_i + y_i)| \leq \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} |(x' + y') - (x_i + y_i)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} [|x' - x_i| + |y' - y_i|] \leq \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} \sqrt{2[(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2]} = \sqrt{2}\delta, \end{aligned}$$

故只要取  $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \times 0.001 \approx 0.00022$ .

即有  $\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$ .

\* ) 对于任意非负实数  $a, b$  有

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{或} \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

从而  $a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ .

计算积分:

$$\text{【3906】} \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy.$$

$$\text{解} \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 1.$$

$$\text{【3907】} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$$

解  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy = \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \frac{1}{40}.$

【3908】  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$

解  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a^3}{3} \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$

【3909】 设  $R$  为矩形  $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ , 函数  $X(x)$  和  $Y(y)$  在相应区间上连续, 证明等式:

$$\iint_R X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法, 不妨先对  $y$  后对  $x$  积分, 即得

$$\iint_R X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y) dy = \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy.$$

【3910】 设  $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$ , 计算  $I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$

解 不妨按先对  $y$  后对  $x$  积分的顺序计算, 即得

$$I = \int_a^A [F'_x(x, B) - F'_x(x, b)] dx = F(x, B) \Big|_a^A - F(x, b) \Big|_a^A = F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b).$$

【3911】 设  $f(x)$  为闭区间  $a \leq x \leq b$  内的连续函数, 证明不等式:

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

且仅当  $f(x) = \text{常数}$  时等号成立.

证明思路 首先, 证明不等式:  $\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$

事实上, 只要在不等式  $\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \geq 0$  中将被积函数  $[f(x) - f(y)]^2$  展开, 并注意  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$ , 即可获证. 当  $f(x) = \text{常数}$  时, 显然上式中等号成立.

其次, 证明: 当  $\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$  时, 则  $f(x) = \text{常数}$ . 事实上, 此时有

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

对函数  $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$  利用 2205 题的结果, 即可得  $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$ . 再次对函数  $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$  利用 2205 题的结果, 即得  $f(x) = \text{常数}$ .

证 因为

$$0 \leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy,$$

故有  $\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$

当  $f(x) = \text{常数}$  时, 显然上式中等号成立. 反之, 设上式中等号成立, 则有

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数  $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$  是  $a \leq x \leq b$  上的非负连续函数, 故  $F(x) \equiv 0$  ( $a \leq x \leq b$ ). 特别  $F(a) = 0$ , 即  $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$ . 又由于函数  $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$  是  $a \leq y \leq b$  上的非负连续函数, 故  $G(y) \equiv 0$  ( $a \leq y \leq b$ ). 因此,  $f(y) \equiv f(a)$  ( $a \leq y \leq b$ ), 即  $f(x) = \text{常数}$ . 证毕.

【3912】 下列积分有怎样的符号?

(1)  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy;$  (2)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy;$  (3)  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$



解 (1) 由于  $0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1$  及  $\ln(x^2 + y^2) \leq \ln 1 = 0$ , 且当  $|x| + |y| < 1$  时  $\ln(x^2 + y^2) < 0$ ,

故

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy < 0.$$

(2) 我们有  $\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy = I_1 - I_2 - I_3$ , 其中

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy, \quad I_2 = \iint_{1\leq x^2+y^2\leq 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy, \quad I_3 = \iint_{2\leq x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy.$$

显然

$$0 < I_1 < \iint_{x^2+y^2\leq 1} dx dy = \pi, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > \iint_{2\leq x^2+y^2\leq 4} dx dy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy < 0.$$

(3) 我们有

$$\iint_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy = \iint_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 0}} \arcsin(x+y) dx dy + \iint_{\substack{0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零, 第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数, 因而, 积分值是正的. 于是, 原积分是正的.

**【3913】** 求函数  $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$  在正方形:  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$  内的平均值.

提示 所求平均值为积分  $\frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0\leq x\leq \pi \\ 0\leq y\leq \pi}} f(x, y) dx dy$ .

解 平均值  $I_9 = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0\leq x\leq \pi \\ 0\leq y\leq \pi}} \sin^2 x \sin^2 y dx dy = \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^\pi \sin^2 x dx \right]^2 = \frac{1}{\pi^2} \left[ \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi \right]^2 = \frac{1}{4}.$

**【3914】** 利用中值定理估计积分  $I = \iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$

解题思路 注意到积分域的面积 200, 故由积分中值定理知,

$$I = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad \text{其中 } (\xi, \eta) \in \text{区域 } |x| + |y| \leq 10.$$

显然有  $0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2$ , 可以证明必有  $0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2$ .

于是, 可知  $1.96 < I < 2$ .

解 由于积分域的面积 200, 故由积分中值定理知,

$$I = \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \cdot 200 = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad (1)$$

其中  $(\xi, \eta)$  为区域  $|x| + |y| \leq 10$  中的某点.

显然  $0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2$ , 我们证明必有

$$0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2. \quad (2)$$

由于函数  $\cos^2 x + \cos^2 y$  在有界闭区域  $|x| + |y| \leq 10$  上的最大值为 2, 最小值为 0. 从而, 连续函数

$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$  在有界闭区域  $|x| + |y| \leq 10$  上的最小值为  $\frac{1}{102}$ , 最大值为  $\frac{1}{100}$ . 如果  $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta = 2$ , 则

由(1)式知,

$$\iint_{|x|+|y|\leq 10} \left( \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102} \right) dx dy = I - I = 0.$$

但  $f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102}$  是非负连续函数, 从而, 必有  $f(x, y) \equiv 0$  (在区域  $|x| + |y| \leq 10$  上),

即  $\cos^2 x + \cos^2 y \equiv 2$  (在区域  $|x| + |y| \leq 10$  上). 这显然是错误的. 由此可知,  $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2$ . 同理可证

$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta > 0$ . 于是, (2)式成立. 从而, 得  $\frac{200}{102} < I < \frac{200}{100}$ , 即  $1.96 < I < 2$ .



**【3915】** 求圆  $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$  上的点到原点的距离之平方的平均值.

**解题思路** 平均值  $I_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy$ . 可以求得

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} y^2 dx dy = b^2 + \frac{R^2}{4}, \quad \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} x^2 dx dy = a^2 + \frac{R^2}{4}.$$

从而,  $I_0 = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$ .

**解** 平均值  $I_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy$ . 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} y^2 dx dy &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{a-R}^{a+R} dx \int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3\pi R^2} \left\{ 6b^2 \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx + 2 \int_{a-R}^{a+R} [R^2 - (x-a)^2]^{\frac{3}{2}} dx \right\} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \left[ \frac{x-a}{2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{R} \right] \Big|_{a-R}^{a+R} + \frac{2}{3\pi R^2} \left\{ \frac{x-a}{8} [5R^2 - 2(x-a)^2] \sqrt{R^2 - (x-a)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3R^4}{8} \arcsin \frac{x-a}{R} \right\} \Big|_{a-R}^{a+R} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^2}{2} + \frac{1}{3\pi R^2} \cdot \frac{3\pi R^4}{8} = b^2 + \frac{R^2}{4}. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} x^2 dx dy = a^2 + \frac{R^2}{4}.$$

于是,  $I_0 = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$ .

在问题 3916~3922 中, 对二重积分  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  内按所给区域  $\Omega$  依两个不同的顺序安置积分的上下限.

**【3916】**  $\Omega$ —以  $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$  为顶点的三角形.

**解** 为方便起见, 将二重积分  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  记作  $I$ . 于是,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

**【3917】**  $\Omega$ —以  $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$  为顶点的三角形.

**提示** 注意直线  $OA$  的方程为  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $OB$  的方程为  $y = -\frac{1}{2}x$  及  $AB$  的方程为  $y = 1$ .

**解** 如图 8.1 所示,  $OA$  的方程为  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $OB$  的方程为  $y = -\frac{1}{2}x$ ,

$AB$  的方程为  $y = 1$ . 于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx \\ &= \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x, y) dy \\ &= \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

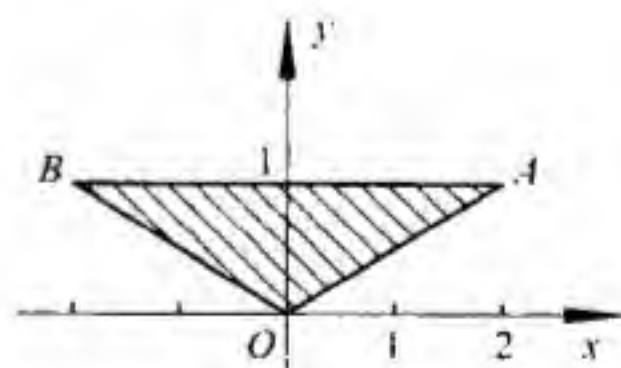


图 8.1

**【3918】**  $\Omega$ —以  $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$  为顶点的梯形.

**解** 如图 8.2 所示,  $BC$  的方程为  $y-1=x$ . 于是,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx.$$

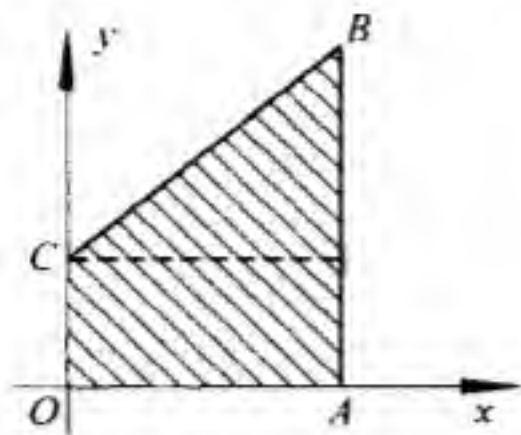


图 8.2

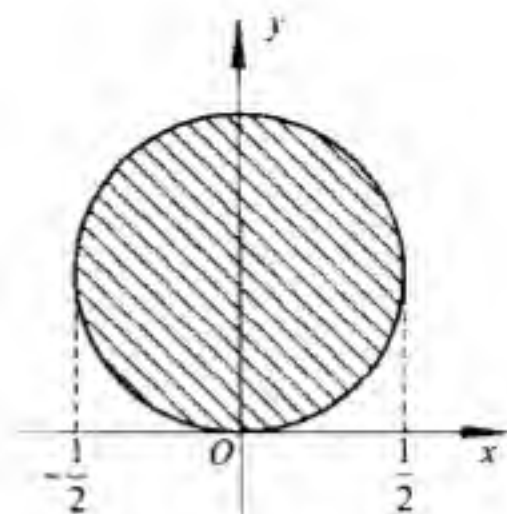


图 8.3

【3919】  $\Omega$ —圆  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

解  $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ .

【3920】  $\Omega$ —圆  $x^2 + y^2 \leq y$ .

提示 积分域  $\Omega$  为  $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ .

解 如图 8.3 所示, 积分域  $\Omega$  为  $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ , 其围线为

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2.$$

于是,

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$$

【3921】  $\Omega$ —被曲线  $y=x^2$  和直线  $y=1$  所包围的区域.

解 曲线  $y=x^2$  及  $y=1$  的交点为  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$ . 于是,

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

【3922】  $\Omega$ —圆环  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .

解 如图 8.4 所示, 若先对  $y$  后对  $x$  积分, 则

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right\} + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

若先对  $x$  后对  $y$  积分, 则

$$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \left\{ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right\} + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

【3923】 证明狄利克雷公式:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0).$$

证明思路 注意公式左端的逐次积分, 等于积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

其中  $\Omega$  为三角形域  $OAB$ ;  $O(0, 0)$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(a, a)$ , 改变积分的顺序, 公式即可获证.

证 公式左端的逐次积分, 等于积分  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ , 其中  $\Omega$  为三角形域  $OAB$  (图 8.5);  $O(0, 0)$ ,  $A(a, 0)$ .

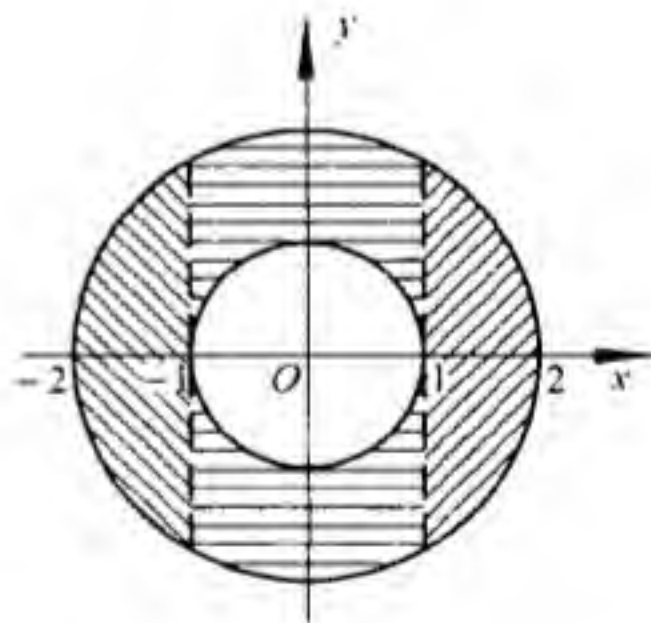


图 8.4

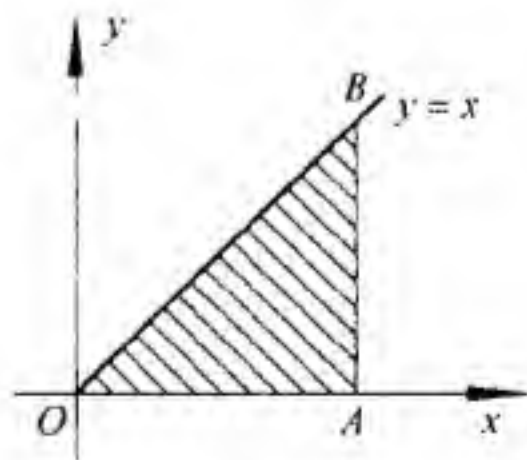


图 8.5

$B(a, a)$ . 对于该积分, 若化为先对  $x$  后对  $y$  的逐次积分, 即为公式的右端. 于是, 本题获证.

在下列积分中改变积分的顺序:

【3924】  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ .

提示 注意积分域的围线为  $y=x$ ,  $y=2x$  及  $x=2$ , 它是一个三角形域, 其顶点为  $(0,0)$ ,  $(2,2)$  及  $(2,4)$ .

解 积分域的围线为:  $y=x$ ,  $y=2x$  及  $x=2$ , 如图 8.6 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{1}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx.$$

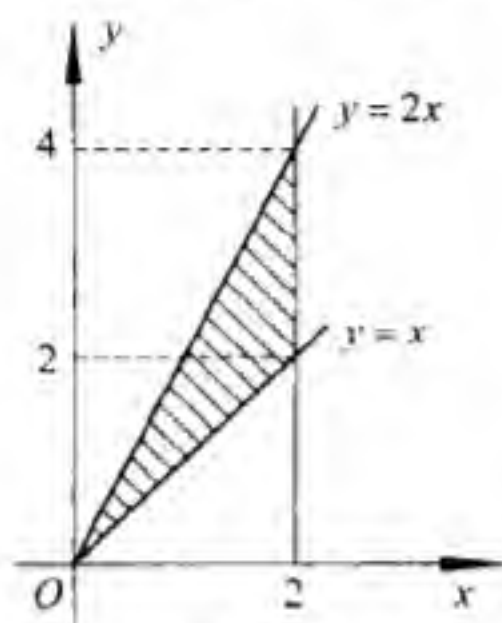


图 8.6

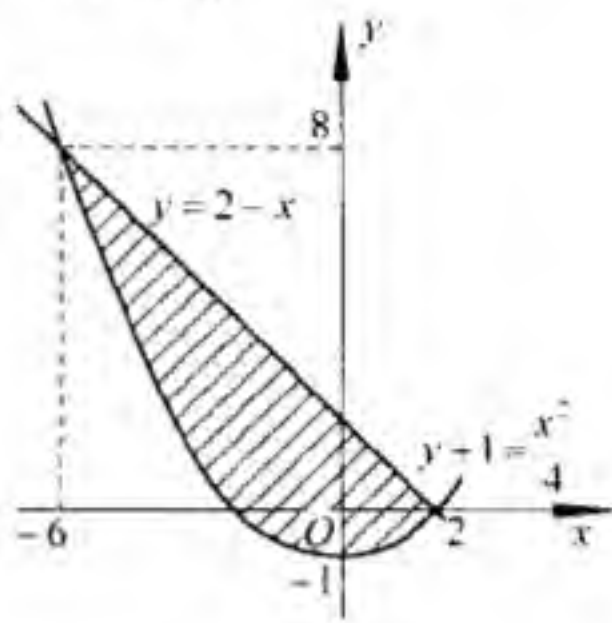


图 8.7

【3925】  $\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$ .

提示 注意积分域的围线为  $y=2-x$  及  $y+1=\frac{x^2}{4}$ , 其交点为  $(2,0)$  及  $(-6,8)$ .

解 积分域的围线为:  $y=2-x$  及  $y+1=\frac{x^2}{4}$ , 其交点为  $(2,0)$ ,  $(-6,8)$ , 如图 8.7 所示. 改变积分的顺序,

序, 即得  $\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy = \int_{-1}^8 dy \int_{-\sqrt{4(y+1)}}^{\sqrt{4(y+1)}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2}^{\sqrt{4(y+1)}} f(x, y) dx$ .

【3926】  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy$ .

提示 注意积分域的围线为  $y=x^2$  及  $y=x^3$ , 其交点为  $(0,0)$  及  $(1,1)$ .

解 积分域的围线为:  $y=x^2$  及  $y=x^3$ , 其交点为  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ , 如图 8.8 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

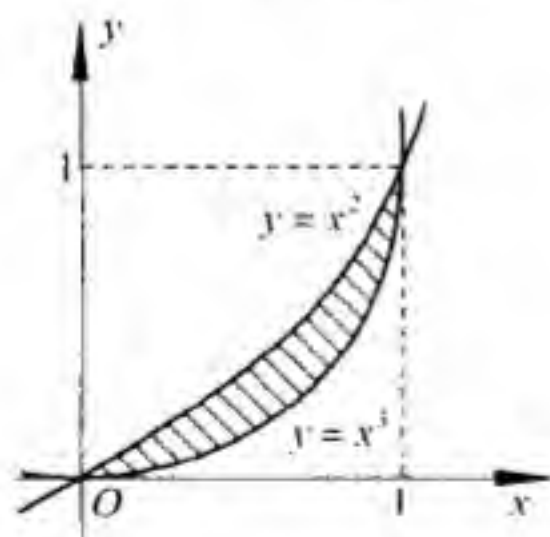


图 8.8

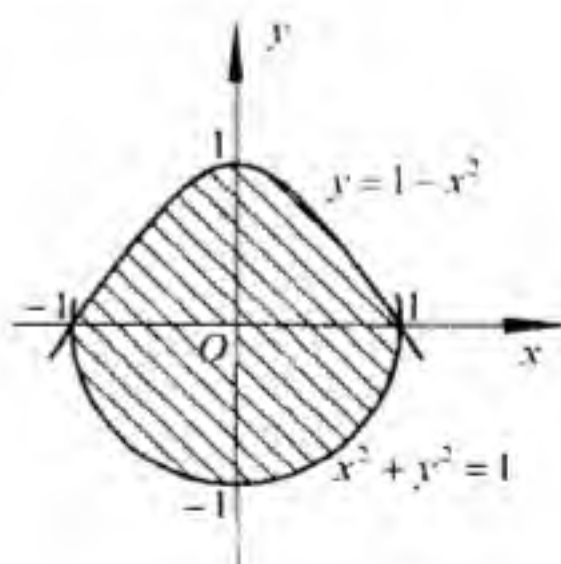


图 8.9

【3927】  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$ .

提示 注意积分域的围线为圆  $x^2+y^2=1$  的下半部分及抛物线  $y=1-x^2$ , 其交点为  $(-1,0)$  及  $(1,0)$ .

解 积分域的围线为圆  $x^2+y^2=1$  的下半部分及抛物线  $y=1-x^2$ , 如图 8.9 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$



**【3928】**  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy.$

提示 注意积分域的围线为圆  $x^2+y^2=2x$  或  $(x-1)^2+y^2=1$  及直线  $y=2-x$ , 其交点为  $(2,0)$  及  $(1,1)$ .

解 积分域的围线为圆  $x^2+y^2=2x$  或  $(x-1)^2+y^2=1$  及直线  $y=2-x$ , 其交点为  $(2,0)$ ,  $(1,1)$ , 如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx.$$

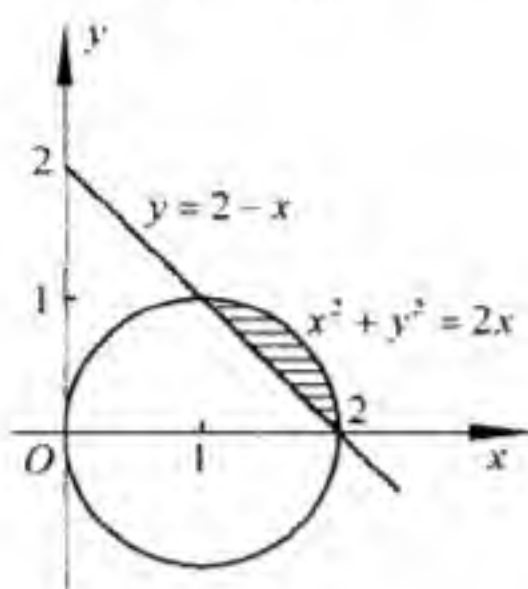


图 8.10

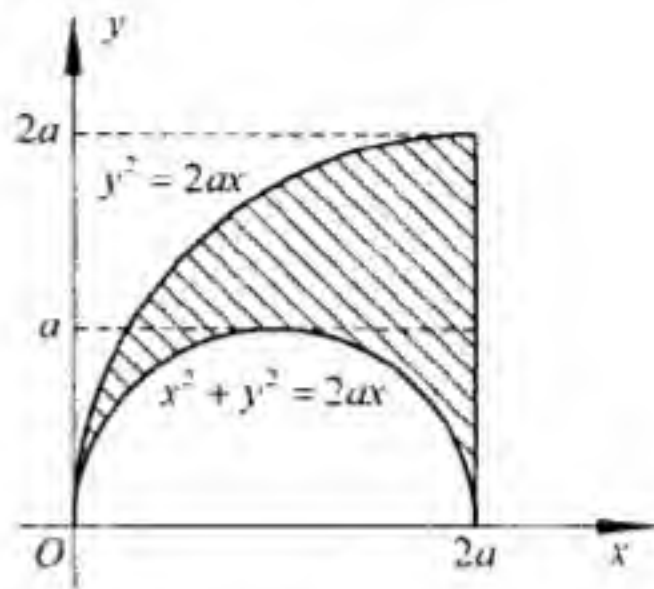


图 8.11

**【3929】**  $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy \quad (a>0).$

提示 注意积分域的围线由圆  $(x-a)^2+y^2=a^2$  ( $y\geq 0$ ), 抛物线  $y^2=2ax$  ( $y\geq 0$ ) 及直线  $x=2a$  组成, 其交点为  $(0,0)$  及  $(2a,0)$ .

解 积分域由围线  $(x-a)^2+y^2=a^2$  ( $y\geq 0$ ),  $y^2=2ax$  ( $y\geq 0$ ) 及  $x=2a$  组成. 如图 8.11 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy = \int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y) dx.$$

**【3930】**  $\int_1^c dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy.$

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_1^c dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^c f(x,y) dx.$$

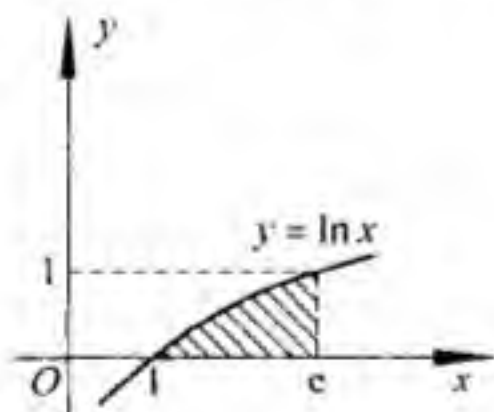


图 8.12

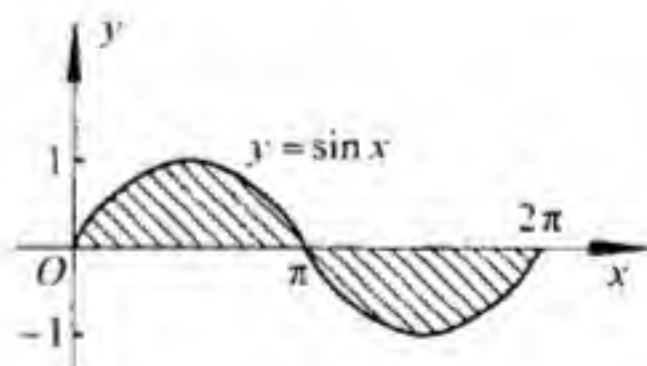


图 8.13

**【3931】**  $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy.$

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于  $y=\sin x$  的反函数, 当  $y$  从 0 变到 1 时为  $x=\arcsin y$ , 当  $y$  从 1 变到 -1 时  $x=\pi-\arcsin y$ , 当  $y$  从 -1 变到 0 时为  $x=2\pi+\arcsin y$ , 故改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y) dx.$$

计算下列积分:

【3932】  $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$ , 设  $\Omega$  是被抛物线  $y^2 = 2px$  和直线  $x = \frac{p}{2}$  ( $p > 0$ ) 所包围的区域.

解 积分域如图 8.14 所示, 于是,

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 dy = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3} x \sqrt{(2px)^3} dx = \frac{p^3}{21}.$$

【3933】  $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$  ( $a > 0$ ), 其中  $\Omega$  是以圆心在点  $(a, a)$  半径为  $a$  的圆周

(它与坐标轴相切)的较短弧和坐标轴为界的区域.

提示 注意积分域  $\Omega$  的围线为圆  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$  与两坐标轴相切的较短弧及直线  $x=0, y=0$ .

因而, 当  $x$  从 0 变到  $a$  时, 对于每一个固定的  $x, y$  从 0 变到  $a - \sqrt{2ax - x^2}$ .

解 如图 8.15 所示, 当  $x$  从 0 变到  $a$  时, 对于每一固定的  $x, y$  从 0 变到  $a - \sqrt{2ax - x^2}$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy \\ &= \int_0^a \frac{a dx}{\sqrt{2a-x}} - \int_0^a \sqrt{x} dx = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a \sqrt{a}. \end{aligned}$$

【3934】  $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$ , 其中  $\Omega$  是以  $a$  为半径, 坐标原点为圆心的圆.

提示 原式  $= \int_{-a}^a |x| dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |y| dy$ , 并注意被积函数均为偶函数及积分区间的对称性.

$$\text{解 } \iint_{\Omega} |xy| dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |xy| dy = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) |x| dx = 2 \int_0^a (a^2 - x^2) x dx = \frac{a^4}{2}.$$

【3935】  $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $\Omega$  是以  $y=x, y=x+a, y=a$  和  $y=3a$  ( $a > 0$ ) 为边的平行四边形.

提示 宜选择先对  $x$  后对  $y$  积分较好.

解 如图 8.16 所示, 当  $y$  从  $a$  变到  $3a$  时, 对于每一固定的  $y, x$  从  $y-a$  变到  $y$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left[ \frac{y^3}{3} + ay^2 - \frac{(y-a)^3}{3} \right] dy = \frac{168a^4}{12} = 14a^4. \end{aligned}$$

【3936】  $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$ , 其中  $\Omega$  是被横轴和摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

提示 利用 2281 题及 2282 题的结果.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_{\Omega} y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^y y^2 dy = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt = \frac{2^4 a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt = \frac{2^5 a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8 u du \right\} = \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 u du \right\} = \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du^*, \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{12} \pi a^4. \end{aligned}$$

\* ) 利用 2282 题的结果.

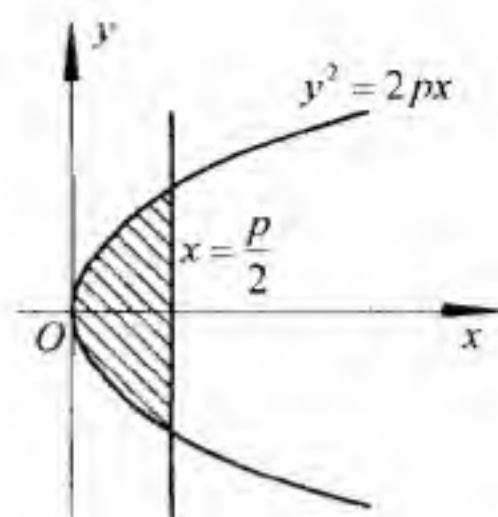


图 8.14

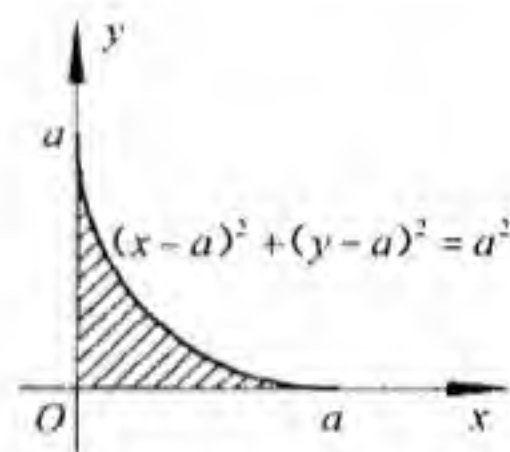


图 8.15

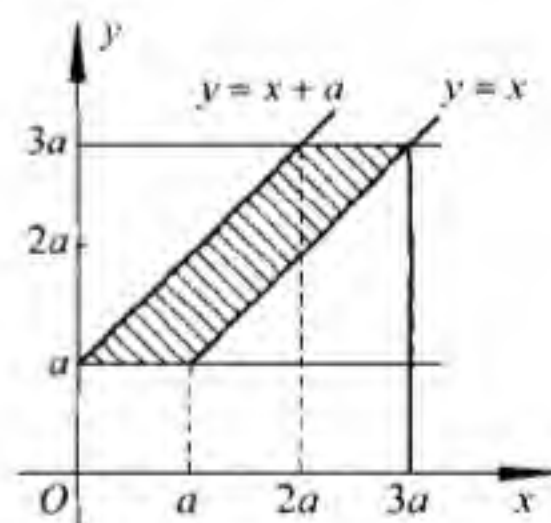


图 8.16



\* \* ) 利用 2281 题的结果.

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

中, 令  $x = r \cos \varphi$  和  $y = r \sin \varphi$ , 变换为极坐标  $r$  和  $\varphi$ , 并配置积分的限, 设:

【3937】  $\Omega$ —圆  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

解 雅可比行列式  $I = r$ , 以下各题不再写出.  $\varphi$  从 0 变到  $2\pi$ ,  $r$  从 0 变到  $a$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3938】  $\Omega$ —圆  $x^2 + y^2 \leq ax$  ( $a > 0$ ).

解 圆  $x^2 + y^2 \leq ax$  即  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2$ , 其围线的极坐标方程为  $r = a \cos \varphi$ . 当  $\varphi$  从  $-\frac{\pi}{2}$  变到  $\frac{\pi}{2}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $a \cos \varphi$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3939】  $\Omega$ —环  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ .

提示 注意当  $\varphi$  从 0 变到  $2\pi$  时,  $r$  从  $|a|$  变到  $|b|$ .

解  $\varphi$  从 0 变到  $2\pi$ ,  $r$  从  $|a|$  变到  $|b|$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3940】  $\Omega$ —三角形  $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x$ .

提示 注意直线  $x+y=1$  的极坐标方程为  $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$  及  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ .

解 由于直线  $x+y=1$  的极坐标方程为

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

因而当  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3941】  $\Omega$ —区域  $-a \leq x \leq a; \frac{x^2}{a} \leq y \leq a$ .

解题思路 注意抛物线  $y = \frac{x^2}{a}$  及直线  $y = a$  的极坐标方程分别为  $r = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$  及  $r = \frac{a}{\sin \varphi}$ . 又  $\varphi$  的积分范围

$[0, \pi]$  应分为  $[0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  及  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ .

解 如图 8.17 所示, 区域  $\Omega$  可分为三部分:

(1) 当  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{4}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ , 其中  $r = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$  为抛物线  $y = \frac{x^2}{a}$  的极坐标方程;

(2) 当  $\varphi$  从  $\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{3\pi}{4}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $\frac{a}{\sin \varphi}$ ;

(3) 当  $\varphi$  从  $\frac{3\pi}{4}$  变到  $\pi$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ .

于是,

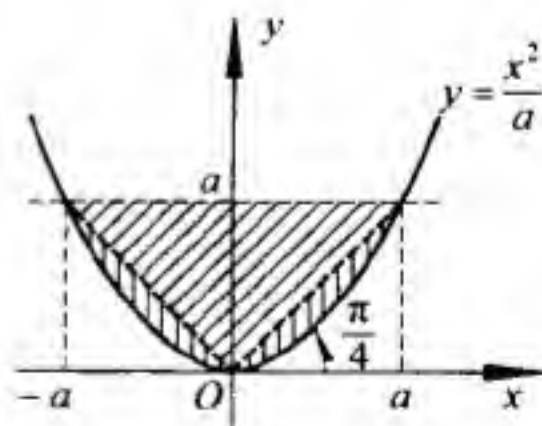


图 8.17

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}}^{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

**【3942】** 在怎样的情况下,当变换为极坐标之后,积分的上下限是常数?

**提示** 当且仅当积分域为由中心在原点的两同心圆和由原点引出的两条射线所围成.

**解** 若变换为极坐标,积分  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b d\varphi \int_c^d f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$ ,

其中  $a, \beta, a, b$  均为常数,则表明积分域  $\Omega$  为  $a \leq r \leq b, a \leq \varphi \leq \beta$ . 它表示圆环面  $a \leq r \leq b$  被射线  $\varphi = a, \varphi = \beta$  截出的部分,且只有积分域是这种情况,变换为极坐标后积分的上下限才是常数. 如 3937 题及 3939 题即为其特例.

在下列积分中,令  $x = r \cos \varphi$  和  $y = r \sin \varphi$ ,变换为极坐标  $r$  和  $\varphi$ ,并依两种不同的顺序配置积分的上下限:

**【3943】**  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

**解** 如图 8.18 所示,若先对  $r$  积分,则当  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{4}$  时,对于每一固定的  $\varphi, r$  从 0 变到  $\sec \varphi$ ; 当  $\varphi$  从  $\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{2}$  时,对于每一固定的  $\varphi, r$  从 0 变到  $\csc \varphi$ .

若先对  $\varphi$  积分,则当  $r$  从 0 变到 1 时,  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ ; 当  $r$  从 1 变到  $\sqrt{2}$  时,对于每一固定的  $r, \varphi$  从  $\arccos \frac{1}{r}$  变到  $\arcsin \frac{1}{r}$ , 于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\csc \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \\ &= \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

下面的 3944 题~3950 题均可仿本题的思路来求解.

**【3944】**  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

**解** 如图 8.19 所示,若先对  $r$  积分,则当  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$  时,对于每一固定的  $\varphi, r$  从  $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})$  变到 1. 若先对  $\varphi$  积分,则当  $r$  从  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  变到 1 时,对于每一固定的  $r, \varphi$  从  $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$  变到  $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$ , 其中直线  $x + y = 1$  的极坐标方程为  $r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 即  $\cos(\frac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1}{r\sqrt{2}}$  或  $\frac{\pi}{4} - \varphi = \pm \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$ . 于是,

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

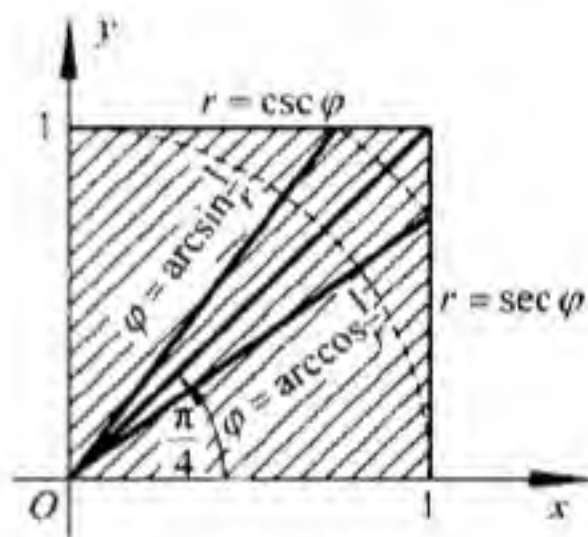


图 8.18

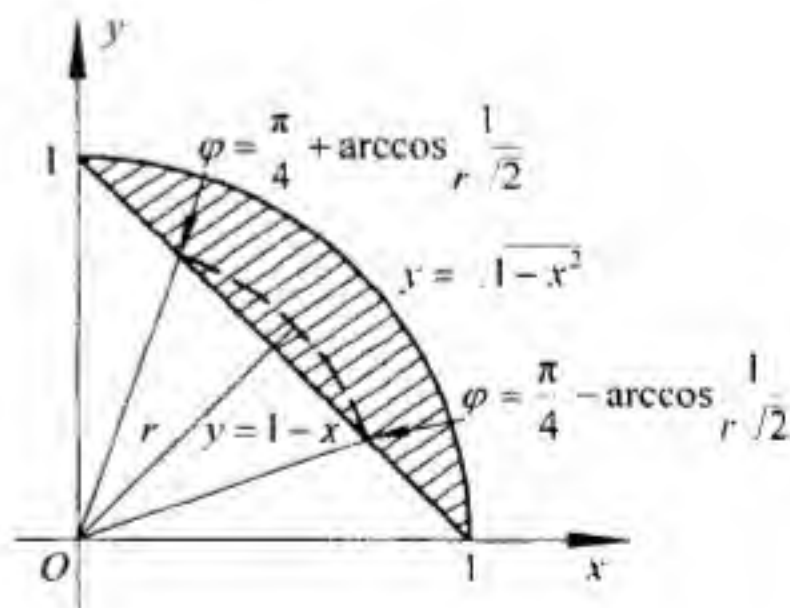


图 8.19



【3945】  $\int_0^2 dx \int_r^{\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy.$

解 如图 8.20 所示. 若先对  $r$  积分, 则当  $\varphi$  从  $\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{3}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $\frac{2}{\cos\varphi}$ .

若先对  $\varphi$  积分, 则当  $r$  从 0 变到  $2\sqrt{2}$  时,  $\varphi$  从  $\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{3}$ ; 当  $r$  从  $2\sqrt{2}$  变到 4 时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $\arccos \frac{2}{r}$  变到  $\frac{\pi}{3}$ . 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_r^{\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r f(r) dr \\ &= \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

【3946】  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$

解 如图 8.21 所示. 若先对  $r$  积分, 则当  $\varphi$  从 0 变到  $\frac{\pi}{4}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从  $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$  变到  $\frac{1}{\cos\varphi}$ , 其中  $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$  为抛物线  $y = x^2$  的极坐标方程.

若先对  $\varphi$  积分, 则当  $r$  从 0 变到 1 时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从 0 变到  $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$  (由  $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$  解出  $\varphi$ ); 当  $r$  从 1 变到  $\sqrt{2}$  时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $\arccos \frac{1}{r}$  变到  $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$ . 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr = \int_0^1 r dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

【3947】  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ , 其中区域  $\Omega$  由曲线  $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$  ( $x \geq 0$ ) 围成.

解 令  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$ , 则曲线  $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$  ( $x \geq 0$ ) 的极坐标方程为  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ , 其图像是双纽线的右半部分, 如图 8.22 所示.

若先对  $r$  积分, 则当  $\varphi$  从  $-\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{4}$  时, 对于每一固定的  $\varphi$ ,  $r$  从 0 变到  $a\sqrt{\cos 2\varphi}$ .

若先对  $\varphi$  积分, 则当  $r$  从 0 变到  $a$  时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}$  变到  $\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. \end{aligned}$$

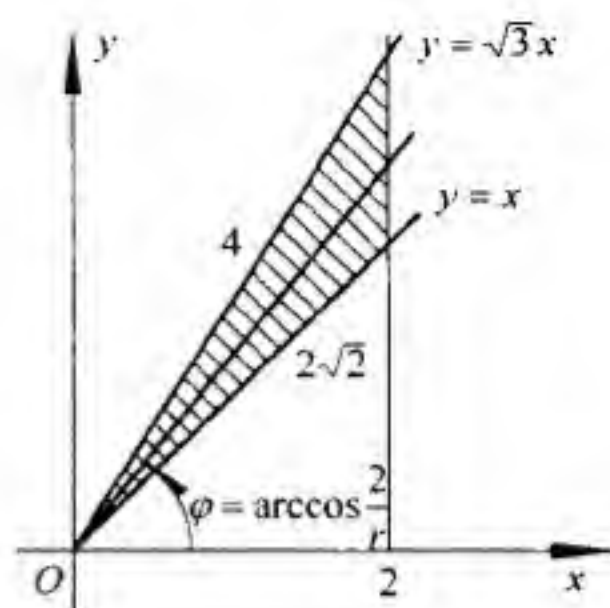


图 8.20

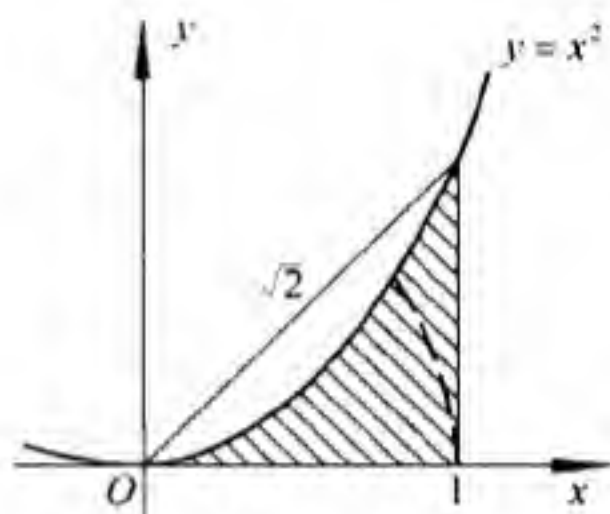


图 8.21

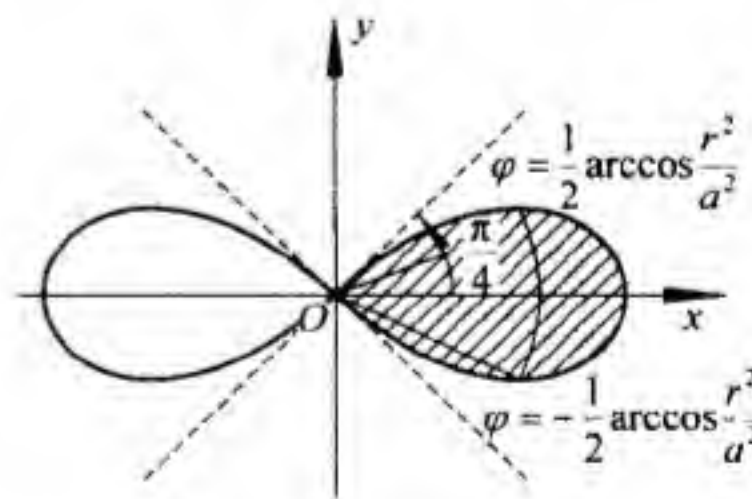


图 8.22

\* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

令  $r$  和  $\varphi$  为极坐标, 在下列积分中变更积分的顺序:

**【3948】**  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (x \geq 0).$

解 积分域为由圆  $r = a \cos \varphi$  或  $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$  所围成的圆域.

若先对  $\varphi$  积分, 则当  $r$  从 0 变到  $a$  时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $-\arccos \frac{r}{a}$  变到  $\arccos \frac{r}{a}$  (图 8.23). 于是,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

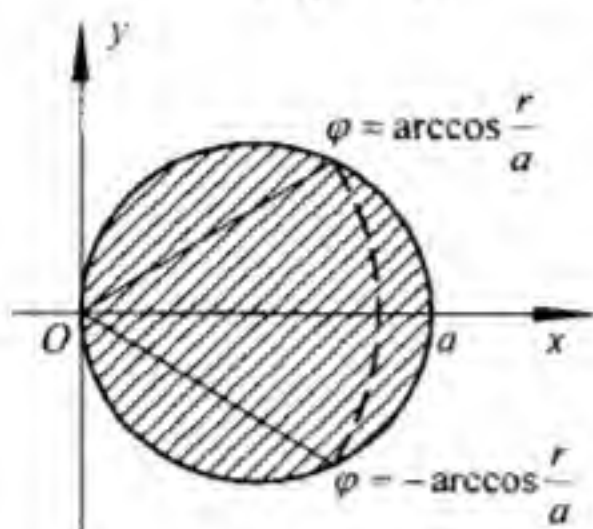


图 8.23

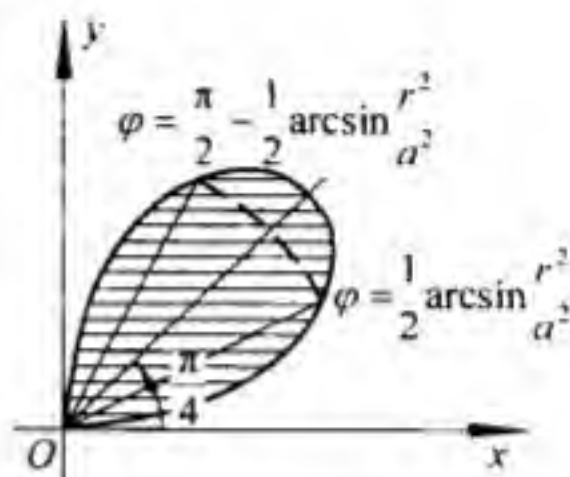


图 8.24

**【3949】**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$

解 积分域由双纽线  $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$  的右上部分围成 (图 8.24).

若先对  $\varphi$  积分, 则当  $r$  从 0 变到  $a$  时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$  变到  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$ . 于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

**【3950】**  $\int_0^a d\varphi \int_0^\varphi f(\varphi, r) dr, \quad (0 < a < 2\pi).$

解 积分域由曲线  $r = \varphi$  (阿基米德螺线) 与射线  $\varphi = a$  围成 (图 8.25).

改变积分顺序, 即得

$$\int_0^a d\varphi \int_0^\varphi f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi.$$

变换成极坐标, 把二重积分化为一重积分:

**【3951】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$

提示 注意先对  $r$  再对  $\varphi$  积分, 即易获解.

解  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(r) r dr = 2\pi \int_0^1 r f(r) dr.$

**【3952】**  $\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$ , 其中  $\Omega = \{ |y| \leq |x|; |x| \leq 1 \}.$

解题思路 注意先对  $\varphi$  后对  $r$  积分, 当  $r$  从 0 变到 1 时, 对于每一个固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $-\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{4}$ ; 当  $r$  从

1 变到  $\sqrt{2}$  时, 对于每一个固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $\arccos \frac{1}{r}$  变到  $\frac{\pi}{4}$ .

注意到积分域  $\Omega$  关于  $x$  轴及  $y$  轴的对称性, 故当  $\varphi$  从  $-\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{4}$  时, 应在所得的积分表达式前面乘以

常数 2, 而当  $\varphi$  从  $\arccos \frac{1}{r}$  变到  $\frac{\pi}{4}$  时, 则应在所得的积分表达式前面乘以常数 4. 这一点务请读者注意, 否

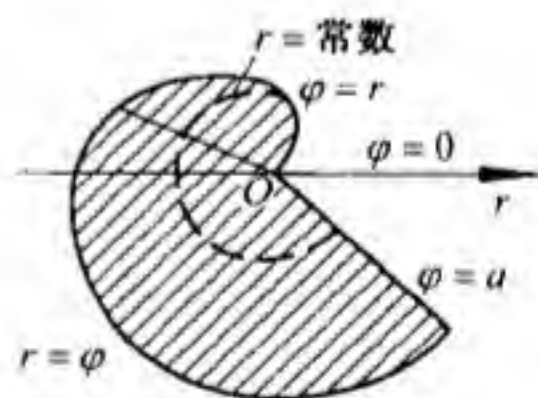


图 8.25



则就会产生错误.

**解** 积分域  $\Omega$  如图 8.26 所示. 先对  $\varphi$  积分, 则当  $r$  从 0 变到 1 时,  $\varphi$  从  $-\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{4}$ ; 当  $r$  从 1 变到  $\sqrt{2}$  时, 对于每一固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $\arccos \frac{1}{r}$  变到  $\frac{\pi}{4}$ . 于是,

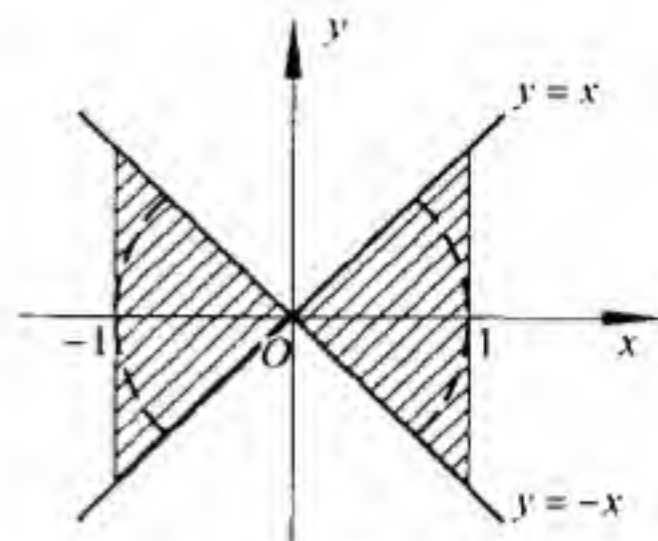


图 8.26

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 r f(r) dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + 4 \int_1^{\sqrt{2}} r f(r) dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\ &= \pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

**【3953】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq r} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$

**提示** 注意先对  $r$  再对  $\varphi$  积分, 当  $r$  从 0 变到  $\cos \varphi$  时, 对于每一个固定的  $r$ ,  $\varphi$  从  $-\frac{\pi}{2}$  变到  $\frac{\pi}{2}$ , 问题即可获解.

**解**  $\iint_{x^2+y^2 \leq r} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(\tan \varphi) r dr = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi.$

变换成极坐标, 计算下列二重积分:

**【3954】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

**提示** 注意积分域  $\Omega$  为  $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$ .

**解**  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \cdot r dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$

**【3955】**  $\iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq 4a^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

**提示** 注意积分域  $\Omega$  为  $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq r \leq 2a\}$ .

**解**  $\iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq 4a^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} r \sin r dr = 2\pi \int_a^{2a} r \sin r dr = -6\pi^2.$

**【3956】** 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

把正方形  $S\{a < x < a+h, b < y < b+h\} (a > 0, b > 0)$  变换为区域  $S'$ . 求区域  $S'$  的面积与区域  $S$  的面积之比. 当  $h \rightarrow 0$  时, 此比值的极限等于什么?

**解** 正方形的角点  $A(a, b), B(a+h, b), C(a+h, b+h), D(a, b+h)$  对应于  $Ouv$  平面上的点

$$\begin{aligned} A' & \left( \frac{b^2}{a}, \sqrt{ab} \right), & B' & \left( \frac{b^2}{(a+h)^2}, \sqrt{(a+h)b} \right), \\ C' & \left( \frac{(b+h)^2}{a+h}, \sqrt{(a+h)(b+h)} \right), & D' & \left( \frac{(b+h)^2}{a}, \sqrt{a(b+h)} \right). \end{aligned}$$

正方形的四边  $y=b, x=a+h, y=b+h, x=a$  对应于  $Ouv$  平面上的四条曲线, 即

$$A'B': u = \frac{b^3}{v^2}; \quad B'C': u = \frac{v^4}{(a+h)^3}; \quad C'D': u = \frac{(b+h)^3}{v^2}; \quad D'A': u = \frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的区域即为  $S'$  (图 8.27).

于是, 区域  $S'$  的面积为

$$\begin{aligned}
S' &= \iint_{S'} du dv = \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{a+b}} \frac{v^5}{a^{\frac{3}{2}}} dv + \int_{\sqrt{a+b}}^{\sqrt{a+b}(b+h)} \frac{(b+h)^3}{v^2} dv - \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{a+b}} \frac{b^3}{v^2} dv \\
&\quad - \int_{\sqrt{a+b}(b+h)}^{\sqrt{a+b}} \frac{v^5}{(a+h)^{\frac{3}{2}}} dv = \frac{1}{5a^{\frac{3}{2}}} [\sqrt{a^5(b+h)^5} - \sqrt{a^5b^5}] \\
&\quad + (b+h)^3 \left[ \frac{1}{\sqrt{a(b+h)}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \right] - b^3 \left[ \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)b}} \right] \\
&\quad - \frac{1}{5(a+h)^{\frac{3}{2}}} [\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5} - \sqrt{(a+h)^5b^5}] \\
&= \frac{6}{5} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right].
\end{aligned}$$

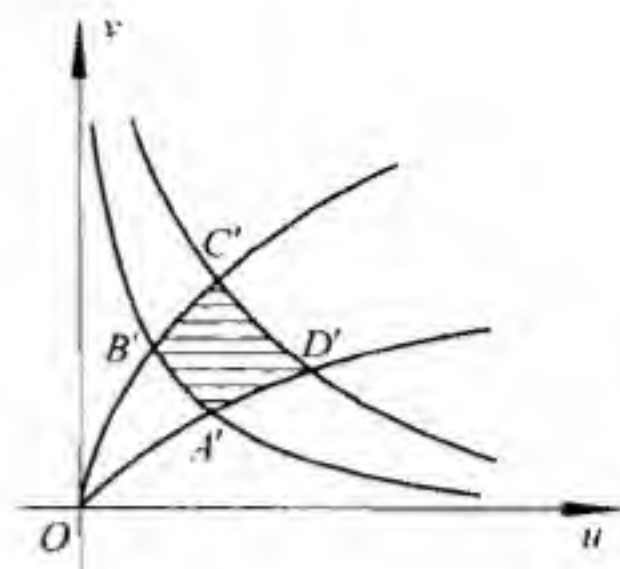


图 8.27

从而, 区域  $S'$  的面积与区域  $S$  的面积之比为

$$\begin{aligned}
\frac{S'}{S} &= \frac{6}{5h^{\frac{3}{2}}} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right] = \frac{6}{5} \cdot \frac{[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}](\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h^{\frac{3}{2}} \sqrt{a(a+h)}} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})(\sqrt{b+h} - \sqrt{b})} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})}.
\end{aligned}$$

上述比式是  $h$  的函数, 并且在  $h=0$  点连续. 于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5b^2}{4\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}} = \frac{3}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上, 应用洛必达法则求此极限更简单些, 这是因为

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{2} \sqrt{(b+h)^3} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}}, \\
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (a+h)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

于是, 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意 若利用二重积分的变量代换, 则计算  $S'$  较为简单, 容易算得

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = -\frac{3}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{3}{2}},$$

故 
$$S' = \iint_{S'} du dv = \iint_S \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| dx dy = \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{1}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{6}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right) (\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5})$$

与上述结果一致. 但是, 从原习题集的安排来看, 似乎应从 3965 题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分.

引入新的变量  $u, v$  来代替  $x, y$  并确定下列二重积分中的积分限:

**【3957】**  $\int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b; 0 < a < \beta),$  令

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

提示 注意在所给变换  $u = x, v = \frac{y}{x}$  下, 积分域由  $a \leq x \leq b, ax \leq y \leq \beta x$  变为  $a \leq u \leq b, a \leq v \leq \beta$ , 且变换的雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$



解 在变换  $u=x, v=\frac{y}{x}$  下, 区域  $\Omega=\{a \leq x \leq b, ax \leq y \leq \beta x\}$  变为  $\Omega'=\{a \leq u \leq b, a \leq v \leq \beta\}$ . 变换的雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$

于是

$$\int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_a^b u du \int_a^{\beta} f(u, uv) dv.$$

**【3958】**  $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy$ , 令  $u=x+y, v=x-y$ .

提示 在变换  $u=x+y, v=x-y$  下, 积分域由  $0 \leq x \leq 2, 1-x \leq y \leq 2-x$  变为  $1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4-u$ , 且变换的雅可比行列式  $I = -\frac{1}{2}, x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ .

解 在变换  $u=x+y, v=x-y$  下, 区域  $\Omega=\{0 \leq x \leq 2, 1-x \leq y \leq 2-x\}$  变为  $\Omega'=\{1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4-u\}$ . 事实上,  $u+v=2x, u-v=2y$ , 故  $0 \leq u+v \leq 4$ , 即  $-u \leq v \leq 4-u$ . 变换的雅可比行列式  $I = -\frac{1}{2}$ , 从而,  $|I| = \frac{1}{2}$ , 且  $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ . 于是,

$$\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

**【3959】**  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ , 其中  $\Omega$  是被曲线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x=0, y=0 (a>0)$  所包围的区域, 令

$$x = u \cos^4 v, \quad y = u \sin^4 v.$$

提示 注意  $\Omega$  的界线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  的参数方程为

$$x = a \cos^4 v, \quad y = a \sin^4 v \quad (0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}).$$

对于所给变换, 有  $|I| = 4|u \cos^3 v \cdot \sin^3 v|$ , 且积分域  $\Omega$  变为  $\Omega' = \{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

解  $\Omega$  的界线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  的参数方程为

$$x = a \cos^4 v, \quad y = a \sin^4 v \quad (0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}).$$

对于变换  $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v$ , 有  $|I| = 4|u \cos^3 v \sin^3 v|$ , 且区域  $\Omega$  变为  $\Omega' = \{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= 4 \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du. \end{aligned}$$

**【3960】** 证明: 变量代换  $x+y=\xi, y=\xi\eta$  把三角形  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$  变为单位正方形  $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ .

证 由  $0 \leq y \leq 1-x$  及  $0 \leq x \leq 1$  得  $0 \leq x+y \leq 1$ , 即  $0 \leq \xi \leq 1$ . 又  $\eta = \frac{y}{\xi} \leq \frac{y}{0+y} = 1$ , 且  $\eta \geq 0$ , 故  $0 \leq \eta \leq 1$ .

反之, 从  $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ , 得  $0 \leq x+y \leq 1, y=\xi\eta, x=\xi(1-\eta)$ , 故  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$ . 因此, 三角形域  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$  变为正方形域  $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ .

**【3961】** 在怎样的变量代换下, 由曲线  $xy=1, xy=2, x-y+1=0, x-y-1=0 (x>0, y>0)$  围成的曲线四边形被变换成矩形, 且其边平行于坐标轴?

提示 宜作变换  $xy=u, x-y=v$ .

解 原四条曲线为  $xy=1, xy=2, x-y=-1, x-y=1 (x>0, y>0)$ , 故显然应作变换  $xy=u, x-y=v$ . 这时  $u$  从 1 变到 2,  $v$  从 -1 变到 1, 故原积分域变为区域:  $1 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$ .

进行适当的变量代换, 把二重积分化为一重积分:

**【3962】**  $\iint_{x+y \leq 1} f(x+y) dx dy.$

提示 作变换  $x+y=u, x-y=v$  或  $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ , 则有  $|I|=\frac{1}{2}$ , 且  $u$  从  $-1$  变到  $1, v$  也从  $-1$  变到  $1$ .

解 作变换  $x+y=u, x-y=v$  或  $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ , 则有  $|I|=\frac{1}{2}$ , 且  $u$  从  $-1$  变到  $1, v$  从  $-1$  变到  $1$ . 于是,

$$\iint_{x+y \leq 1} f(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

**【3963】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$

提示 作变换  $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$ , 则有  $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$  及  $x^2+y^2=u^2+v^2$ , 故区域  $x^2+y^2 \leq 1$  变为  $u^2+v^2 \leq 1$ , 且有  $|I|=1$ .

解 作变换  $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$ , 则有  $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$  及  $x^2+y^2=u^2+v^2 \leq 1$ , 故区域  $x^2+y^2 \leq 1$  变为  $u^2+v^2 \leq 1$ , 且有  $|I|=1$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du dv = \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) dv \\ &= \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du. \end{aligned}$$

**【3964】**  $\iint_{\Omega} f(xy) dx dy$  其中区域  $\Omega$  由曲线  $xy=1, xy=2, y=x, y=4x (x>0, y>0)$  围成.

提示 作变换  $xy=u, \frac{y}{x}=v$ , 即  $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$ . 则区域  $\Omega$  变为区域

$$\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}, \quad \text{且 } |I| = \frac{1}{2v}.$$

解 作变换  $xy=u, \frac{y}{x}=v$ , 则区域  $\Omega$  变为区域  $\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$ , 且  $|I| = \frac{1}{2v}$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(xy) dx dy = \int_1^2 \frac{dv}{2v} \int_1^2 f(u) du = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

计算下列二重积分:

**【3965】**  $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ , 其中区域  $\Omega$  由曲线  $x^2+y^2=x+y$  围成.

提示 作变换  $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$ . 则区域  $\Omega$  变为区域

$$\Omega' = \left\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \text{且 } |I|=r.$$

解 区域  $\Omega$  即圆  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ . 作变换:  $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$ , 则区域  $\Omega$  变为区域  $\Omega' = \left\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ , 且  $|I|=r$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [r+r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)] dr = \frac{\pi}{2}.$$

**【3966】**  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x|+|y|) dx dy.$



提示 注意积分域的对称性.

解  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy = \frac{4}{3}.$

【3967】  $\iint_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dx dy$ , 其积分域  $\Omega$  是椭圆区域  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ .

提示 作变换  $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$ , 则区域  $\Omega$  变为区域  $\Omega'=\{0\leq r\leq 1, 0\leq \varphi\leq 2\pi\}$ , 且有  $|I|=abr$ .

解 作变换  $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$ , 则区域  $\Omega$  变为区域  $\Omega'=\{0\leq r\leq 1, 0\leq \varphi\leq 2\pi\}$ , 且  $|I|=abr$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab \sqrt{1-r^2} r dr = 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{2\pi ab}{3}.$$

【3968】  $\iint_{x^4+y^4\leq 1} (x^2+y^2) dx dy$ .

提示 作变换  $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ , 利用对称性及 1712 题的结果.

解 作变换  $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ , 并利用对称性, 则有

$$\begin{aligned} \iint_{x^4+y^4\leq 1} (x^2+y^2) dx dy &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{(\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi})^{\frac{1}{4}}} r^3 dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\varphi d\tan\varphi}{1+\tan^4\varphi} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 1712 题的结果.

【3969】  $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ , 其积分域  $\Omega$  由曲线  $y^2=2x, x+y=4, x+y=12$  围成.

解 由解方程组  $\begin{cases} x+y=4, \\ y^2=2x \end{cases}$  及  $\begin{cases} x+y=12, \\ y^2=2x \end{cases}$

求得两条直线与抛物线的交点为  $A(2, 2), B(8, 4), C(18, -6), D(8, -4)$  (图 8.28). 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x+y) dx dy &= \int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx + \int_{-4}^{-6} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx \\ &\quad + \int_{-4}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx = 79 \frac{13}{15} + 384 + 79 \frac{13}{15} \\ &= 543 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

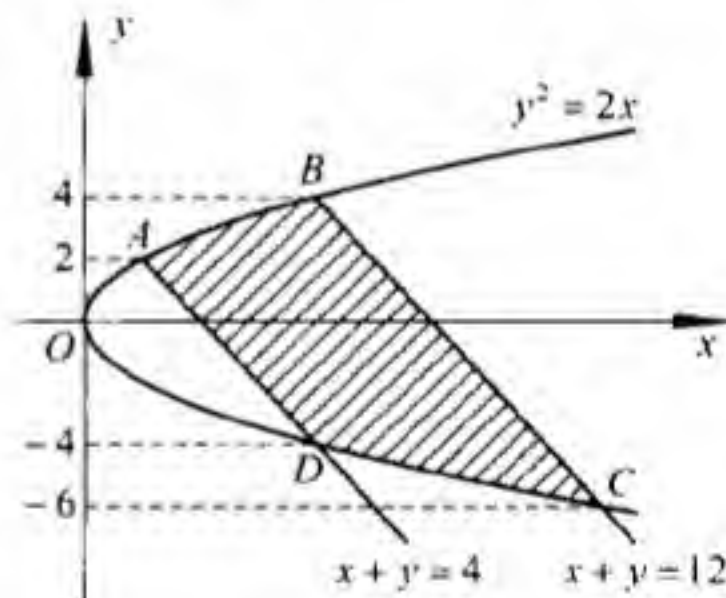


图 8.28

【3970】  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ , 其中  $\Omega$  是由曲线  $xy=1, x+y=\frac{5}{2}$  围成

的区域.

解 曲线  $xy=1$  与直线  $x+y=\frac{5}{2}$  的交点为  $(\frac{1}{2}, 2), (2, \frac{1}{2})$ . 于是,

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 x dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y dy = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( \frac{25}{4}x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{x} \right) dx = 1 \frac{37}{128} - \ln 2.$$

【3971】  $\iint_{\substack{0\leq x\leq \pi \\ 0\leq y\leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy$ .

解  $\iint_{\substack{0\leq x\leq \pi \\ 0\leq y\leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right] dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[ -\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy + \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right] dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) - \left[ \sin(x + \pi) - \sin \frac{\pi}{2} \right] \right\} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ -\left( \sin \frac{3\pi}{2} - \sin x \right) + \left[ \sin(x + \pi) - \sin \frac{3\pi}{2} \right] \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dx = 2\pi.$$

**【3972】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$

解 积分域如图 8.29 所示, 由  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  和  $\Omega_4$  所组成, 其中  $\Omega_1$  为由圆  $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = 0$ , 即圆  $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$  围成的区域, 该圆的极坐标方程为  $r = \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$ , 而圆  $x^2 + y^2 = 1$  的极坐标方程为  $r = 1$ . 于是, 各区域分别为

$$\Omega_1: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sin(\varphi + \frac{\pi}{4});$$

$$\Omega_2: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \leq r \leq 1;$$

$$\Omega_3: \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1;$$

$$\Omega_4: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \leq r \leq 1.$$

当点在  $\Omega_1$  中时, 由于  $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ ,

即  $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - (x^2 + y^2) \geq 0$ , 故

$$\left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) - r^2;$$

当点在  $\Omega_2, \Omega_3$  和  $\Omega_4$  中时,

$$\left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| = x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} = r^2 - r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}).$$

于是, 注意到利用对称性即得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} [r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) - r^2] r dr + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 [r^2 - r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})] r dr \\ & \quad + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 [r^2 - r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})] r dr \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(\varphi + \frac{\pi}{4}) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{6} \sin^4(\varphi + \frac{\pi}{4}) \right] d\varphi \\ & \quad + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du \right) + \left( \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{32} + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{32} \right) + \left( \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9\pi}{16}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 2281 题的结果.

**【3973】**  $\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y - x^2|} dx dy.$

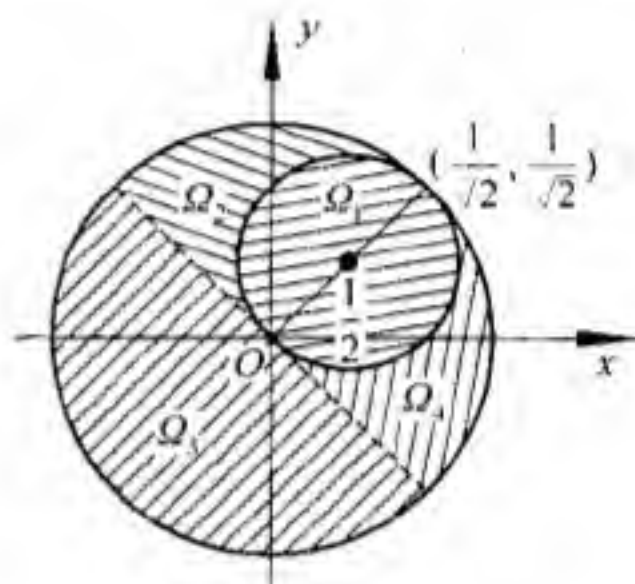


图 8.29



提示 注意  $\iint_{\substack{x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \iint_{\substack{x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2}} \sqrt{x^2-y} dx dy + \iint_{\substack{x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2}} \sqrt{y-x^2} dx dy,$

并在积分过程中作代换  $x = \sqrt{2} \sin t$  及利用 1750 题的结果.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_{\substack{x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy &= \iint_{\substack{x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2}} \sqrt{x^2-y} dx dy + \iint_{\substack{x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2}} \sqrt{y-x^2} dx dy \\ &= \int_1^0 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy + \int_1^0 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy - \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \left( \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

\* ) 参看 1750 题的结果.

计算不连续函数的积分:

【3974】  $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) dx dy.$

解题思路 注意: 当  $y^2-x^2 < 2$  时,  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$ ; 当  $y^2-x^2 > 2$  时,  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$ ; 当  $y^2-x^2 = 2$  时,  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 0$ .

现将区域  $x^2+y^2 \leq 4$  分成  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  及  $\Omega_5$  五个子域, 其中每一个子域的围线为

$$\Omega_1: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y>0; \quad \Omega_2: y^2-x^2=2, x=-1, x=1;$$

$$\Omega_3: x^2+y^2=4, x=-1; \quad \Omega_4: x^2+y^2=4, x=1;$$

$$\Omega_5: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y<0.$$

当点在  $\Omega_1$  及  $\Omega_5$  时,  $y^2-x^2 > 2$ , 故  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$ ;

当点在  $\Omega_2, \Omega_3$  及  $\Omega_4$  中时,  $y^2-x^2 < 2$ , 故  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$ .

从而, 问题可获解.

解 当  $y^2-x^2 < 2$  时,  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$ ; 当  $y^2-x^2 > 2$  时,  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$ ; 当  $y^2-x^2 = 2$  时,  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 0$ .

现将区域  $x^2+y^2 \leq 4$  分成  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  和  $\Omega_5$  五部分, 其界线分别为  $x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, x=\pm 1$  (图 8.30). 当点在  $\Omega_1$  和  $\Omega_5$  中时,  $y^2-x^2 > 2$ , 故  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$ ; 当点在  $\Omega_2, \Omega_3$  和  $\Omega_4$  中时,  $y^2-x^2 < 2$ , 故  $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$ . 于是,

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) dx dy \\ &= - \iint_{\Omega_1} dx dy - \iint_{\Omega_5} dx dy + \iint_{\Omega_2} dx dy + \iint_{\Omega_3} dx dy + \iint_{\Omega_4} dx dy \\ &= -4 \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy + 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy + 4 \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \\ &= 8 \int_0^1 \sqrt{2+x^2} dx + 4 \left( \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

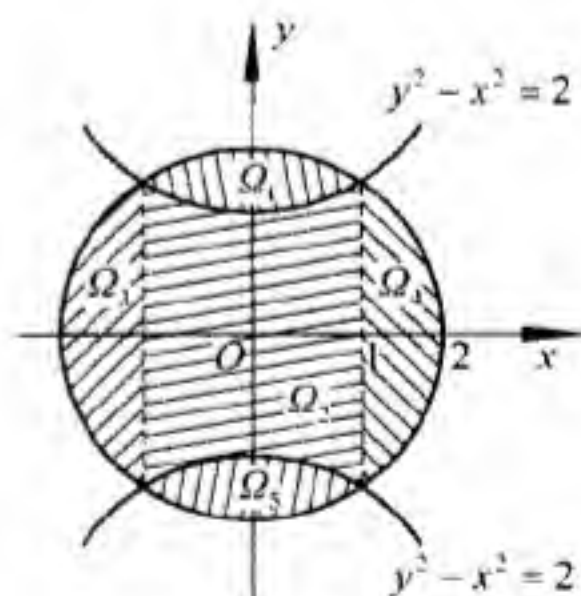


图 8.30

【3975】  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy.$

解题思路 注意:

当  $0 \leq x+y < 1$  时,  $[x+y] = 0$ ; 当  $1 \leq x+y < 2$  时,  $[x+y] = 1$ ; 当  $2 \leq x+y < 3$  时,  $[x+y] = 2$ ; 当  $3 \leq x+y < 4$  时,  $[x+y] = 3$ ; 当  $x+y=4$  时,  $[x+y] = 4$ .

现将区域  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$  分成四个子域  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  及  $\Omega_4$ , 它们依次为

$$\Omega_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\Omega_2: 1 \leq x+y \leq 2, x=0, y=0;$$

$$\Omega_3: 2 \leq x+y \leq 3, x=2, y=2;$$

$$\Omega_4: x+y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2.$$

当点属于  $\Omega_1$  的内部时,  $[x+y]=0$ ; 当点属于  $\Omega_2$  的内部时,  $[x+y]=1$ ; 当点属于  $\Omega_3$  的内部时,  $[x+y]=2$ ; 当点属于  $\Omega_4$  的内部时,  $[x+y]=3$ .

注意  $\iint_{\Omega_i} dx dy$  为区域  $\Omega_i$  的面积 ( $i=1, 2, 3, 4$ ), 问题即易获解.

解 当  $0 \leq x+y < 1$  时,  $[x+y]=0$ ; 当  $1 \leq x+y < 2$  时,  $[x+y]=1$ ;  
当  $2 \leq x+y < 3$  时,  $[x+y]=2$ ; 当  $3 \leq x+y < 4$  时,  $[x+y]=3$ ;  
当  $x+y=4$  时,  $[x+y]=4$ .

如图 8.31 所示, 区域  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$  可分为下列四部分:

$$\Omega_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0; \quad \Omega_2: 1 \leq x+y \leq 2, x=0, y=0;$$

$$\Omega_3: 2 \leq x+y \leq 3, x=2, y=2; \quad \Omega_4: x+y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2.$$

当点属于  $\Omega_1$  的内部时,  $[x+y]=0$ ; 当点属于  $\Omega_2$  的内部时,  $[x+y]=1$ ; 当点属于  $\Omega_3$  的内部时,  $[x+y]=2$ ; 当点属于  $\Omega_4$  的内部时,  $[x+y]=3$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy &= \iint_{\Omega_1} dx dy + 2 \iint_{\Omega_2} dx dy + 3 \iint_{\Omega_3} dx dy \\ &= 2 \left[ \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \right] + 4 \left[ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx \int_{2-x}^x dy + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{2-x}^{3-x} dy \right] + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{3-x}^2 dy \\ &= 2 \left[ \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx + \int_1^2 (2-x) dx \right] + 4 \left[ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x-2) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \right] + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3) dx = 6. \end{aligned}$$

**【3976】**  $\iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y-x^2} dx dy.$

解题思路 注意:

当  $x^2 \leq y < x^2+1$  时,  $[y-x^2]=0$ ; 当  $x^2+1 \leq y < x^2+2$  时,  $[y-x^2]=1$ ; 当  $x^2+2 \leq y < x^2+3$  时,  $[y-x^2]=2$ ; 当  $x^2+3 \leq y < 4$  时,  $[y-x^2]=3$ .

又抛物线  $y=x^2+3, y=x^2+2, y=x^2+1$  及  $y=x^2$  与直线  $y=4$  在第一象限内的交点依次为  $(1, 4), (\sqrt{2}, 4), (\sqrt{3}, 4)$  及  $(2, 4)$ , 与  $Oy$  轴对称的位置还有四个交点.

从而, 问题可获解.

解 如图 8.32 所示.

当  $x^2 \leq y < x^2+1$  时,  $[y-x^2]=0$ ; 当  $1+x^2 \leq y < x^2+2$  时,  $[y-x^2]=1$ ;  
当  $2+x^2 \leq y < x^2+3$  时,  $[y-x^2]=2$ ; 当  $3+x^2 \leq y < 4$  时,  $[y-x^2]=3$ .

抛物线  $y=x^2+3, y=x^2+2, y=x^2+1$  及  $y=x^2$  与直线  $y=4$  在第一象限内的交点为  $A(1, 4), B(\sqrt{2}, 4), C(\sqrt{3}, 4)$  及  $D(2, 4)$ , 与  $Oy$  轴对称的位置还有四个交点. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y-x^2} dx dy &= 2 \left[ \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy \right] + 2\sqrt{2} \left[ \int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+3}^{x^2+4} dy \right] + 2\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_{x^2+3}^{x^2+4} dy \\ &= 2 \left[ \sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (3-x^2) dx \right] + 2\sqrt{2} \left[ 1 + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx \right] + 2\sqrt{3} \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= \frac{4}{3} (4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}). \end{aligned}$$

**【3977】** 设  $m$  及  $n$  为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明:

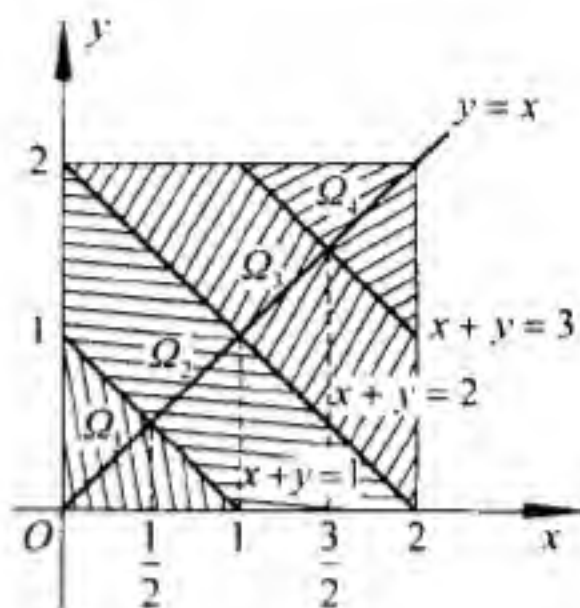


图 8.31

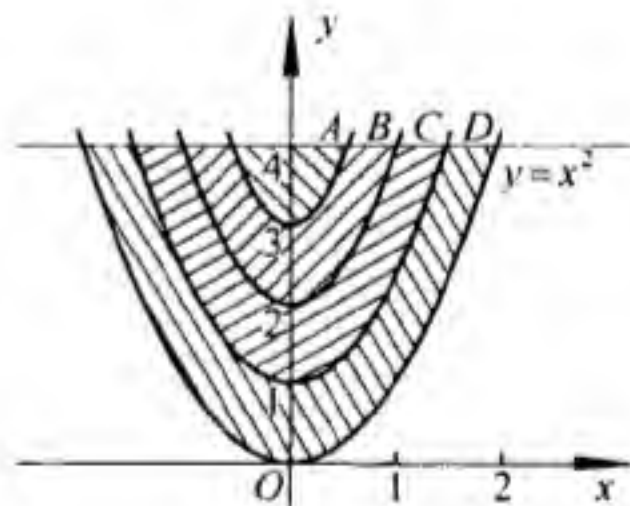


图 8.32



$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

**证明思路** 作变换  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , 并注意  $\cos \varphi$  及  $\sin \varphi$  均为以  $2\pi$  为周期的周期函数, 即可得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \right]. \end{aligned}$$

若在上式右端的第二个积分中令  $\varphi = \pi + t$ , 即得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^{m+n}] \cos^m t \sin^n t dt.$$

从而, 命题易获证.

**证** 作变换  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , 则得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \iint_{0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi} r^{m+n+1} \cos^m \varphi \sin^n \varphi dr d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

若在上式右端的第二个积分中令  $\varphi = \pi + t$ , 即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = (-1)^m (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \sin^n t dt.$$

当  $m$  及  $n$  中有且仅有一个为奇数时,  $(-1)^m (-1)^n = -1$ , 因而, (1) 式为零, 当  $m$  和  $n$  均为奇数时,  $(-1)^m (-1)^n = 1$ , 因而, (1) 式等于  $\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi$ , 但此被积函数在对称区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上为奇函数, 故积分仍然为零.

总之, 当  $m$  和  $n$  中至少有一个为奇数时,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

**【3978】** 求

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy.$$

其中  $f(x, y)$  为连续函数.

**提示** 利用积分中值定理及函数  $f(x, y)$  的连续性.

**解** 利用积分中值定理, 即得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} dx dy = \pi \rho^2 f(\xi, \eta),$$

其中点  $(\xi, \eta)$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq \rho^2$  内的一点. 显然, 当  $\rho \rightarrow 0$  时, 点  $(\xi, \eta) \rightarrow O(0, 0)$ . 于是, 根据函数  $f(x, y)$  的连续性知,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(0, 0).$$

**【3979】** 设  $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{xy}{t}} dx dy$ , 求  $F'(t)$ .

$$\text{解 令 } x = ut, y = vt, \text{ 则 } F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{xy}{t}} dx dy = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{\frac{uv}{2}} du dv \quad (1)$$

于是, 似乎应该有

$$F'(t) = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} 2t e^{\frac{uv}{2}} du dv = \frac{2}{t} \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{\frac{uv}{2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0).$$

但这是错误的,实际上本题有问题,因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分.当  $t > 0$  时,在  $x > 0, y = 0$  上(即  $u > 0, v = 0$  上)被积函数成为无穷,而且这个广义二重积分是发散的.这是因为,根据被积函数的非负性,有(参看本书 § 9)

$$\iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{\frac{u}{v^2}} du dv = \int_0^1 dv \int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}} du = \int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv, \quad (2)$$

对此积分,  $v = 0$  是瑕点,由于被积函数  $v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1)$  在  $0 \leq v \leq 1$  上非负,且(令  $\frac{1}{v^2} = t$ )

$$\lim_{v \rightarrow +0} v^2 [v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t - 1}{t^2} = +\infty,$$

故瑕积分  $\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv$  发散,且  $\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv = +\infty$ . 由此,再根据(1)式与(2)式,得

$$F(t) \equiv +\infty \quad (\text{当 } t > 0 \text{ 时}).$$

因此,提出求  $F'(t)$  的问题是无意义的.

注意,若本题换为:设 
$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{xy}{x^2+y^2}} dx dy,$$

求  $F'(t)$ . 这时得(作代换  $x = ut, y = vt$ )

$$F(t) = t^2 \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{uv}{u^2+v^2}} du dv,$$

从而,右端积分是收敛的,(实际上可视为常义积分).于是,

$$F'(t) = 2t \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{uv}{u^2+v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0).$$

**【3980】** 设  $F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 求  $F'(t)$ .

解 作变量代换  $x = u + t, y = v + t$  ( $t$  固定), 则

$$F(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2} du dv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数\*, 得

$$F'(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} du dv = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad (-\infty < t < +\infty).$$

\* ) 积分号下求导数的合理性, 证明如下: 令

$$f(u, v, t) = \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2},$$

则 
$$f'_t(u, v, t) = \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} \quad ((u, v) \neq (-t, -t)).$$

当  $(u, v) = (-t, -t)$  时, 易知  $f'_t(u, v, t)$  不存在, 但右导数存在且等于  $\sqrt{2}$ , 左导数也存在且等于  $-\sqrt{2}$ . 由于对任何数  $a, b$ , 有  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 故  $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ , 从而,  $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{2}$ . 于是,

$$|f'_t(u, v, t)| \leq \sqrt{2} \quad ((u, v) \neq (-t, -t)). \quad (2)$$

如果  $|t| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 这时  $f(u, v, t), f'_t(u, v, t)$  ( $t$  固定) 都是区域  $u^2 + v^2 \leq 1$  上的连续函数, 当然可在积分号下求导数, 得

$$F'(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv. \quad (3)$$

但如果  $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 则(3)式右端积分的被积函数  $f'_t(u, v, t)$  在积分域  $u^2 + v^2 \leq 1$  中的点  $(u, v) = (-t, -t)$  不



连续. 因此, 不能立即断定(3)式的正确性. 下面不论  $t$  为何值 ( $-\infty < t < +\infty$ ), 直接证明(3)式成立. 令

$$g(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (4)$$

由(2)式知  $f'_t(u, v, t)$  是有界的, 且在区域  $u^2+v^2 \leq 1$  上至多有一个不连续点 ( $t$  固定), 故(4)式右端的积分存在. 实际上, 利用(2)式以及  $f'_t(u, v, t)$  当  $(u, v) \neq (-t, -t)$  时的连续性, 用(必要时, 即  $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  时)挖掉以点  $(-t, -t)$  为中心的小圆域的方法, 不难证明  $g(t)$  是  $-\infty < t < +\infty$  上的连续函数(详细证明留给读者). 令

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds \quad (-\infty < t < +\infty),$$

则

$$G'(t) = g(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (5)$$

但

$$G(t) = \int_0^t ds \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, s) du dv = \iiint_{\substack{u^2+v^2 \leq 1 \\ 0 \leq s \leq t}} f'_t(u, v, s) du dv ds = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv \int_0^t f'_t(u, v, s) ds. \quad (6)$$

注意, (6)式中的运算是合理的, 因为三维区域  $u^2+v^2 \leq 1, 0 \leq s \leq t$  ( $t$  固定) 中, 三元函数  $f'_t(u, v, s)$  有界且只在直线  $u=v=-s$  的一段上不连续, 从而, (6)式中的三重积分及两个累次积分都存在, 故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_t(u, v, s) ds = f(u, v, t) - f(u, v, 0). \quad (7)$$

事实上, 若  $(u, v) \neq (-t_1, -t_1)$  ( $t_1 \in [0, t]$ ), 则  $f'_t(u, v, t)$  是  $0 \leq s \leq t$  上的连续函数 ( $u, v$  固定), 从而, (7)式成立; 若  $(u, v) = (-t_1, -t_1)$  ( $t_1$  是属于  $[0, t]$  的某数), 则由  $f(u, v, s)$  对任何  $u, v, s$  的连续性, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t f'_t(u, v, s) ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{t_1-\epsilon} f'_t(u, v, s) ds + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{t_1+\epsilon'}^t f'_t(u, v, s) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [f(u, v, t_1-\epsilon) - f(u, v, 0)] + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} [f(u, v, t) - f(u, v, t_1+\epsilon')] \\ &= f(u, v, t_1) - f(u, v, 0) + f(u, v, t) - f(u, v, t_1) \\ &= f(u, v, t) - f(u, v, 0), \end{aligned}$$

故(7)式恒成立. 代入(6)式, 得  $G(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} [f(u, v, t) - f(u, v, 0)] du dv = F(t) - F(0) \quad (-\infty < t < +\infty)$ .

由此, 再注意到(5)式, 即知  $F'(t)$  存在, 且

$$F'(t) = G'(t) = g(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty),$$

即(3)式成立.

**【3981】** 设  $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0)$ , 求  $F'(t)$ .

**解题思路** 令  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , 则积分域  $x^2+y^2 \leq t^2$  变为

$$\Omega' = \{0 \leq r \leq t, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad \text{且} \quad F(t) = \int_0^t dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi,$$

利用 2302 题的结果即易获解.

**解** 令  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , 则

$$F(t) = \int_0^t dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$$

故得

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) t d\varphi.$$

注意, 此题中应假定  $f(x, y)$  是连续函数.

**【3982】** 证明: 若  $f(x, y)$  连续, 则函数

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-y}^{\xi+y} f(\xi, \eta) d\eta$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

**证明思路** 利用含参变量的常义积分求导数的公式, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) + f(\xi, \xi-x+y)] d\xi$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_x(\xi, x+y-\xi) - f'_x(\xi, \xi-x+y)] d\xi + f(x, y),$$

同法可求得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi-x+y)] d\xi,$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi.$$

于是, 命题易获证.

**证** 利用含参变量的常义积分求导数的公式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - (-1)f(\xi, \xi-x+y)] d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y-x} f(x, \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) + f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_x(\xi, x+y-\xi) - f'_x(\xi, \xi-x+y)] d\xi + \frac{1}{2} [f(x, x+y-x) + f(x, x-x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_x(\xi, x+y-\xi) - f'_x(\xi, \xi-x+y)] d\xi + f(x, y). \end{aligned}$$

同理, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi.$$

于是, 得  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ , 证毕.

**注意** 显然本题还应假定  $f'_x(x, y)$  存在且连续.

**【3983】** 设函数  $f(x, y)$  的等值线是简单封闭曲线, 区域  $S(v_1, v_2)$  由曲线  $f(x, y) = v_1$  及  $f(x, y) = v_2$  围成. 证明:

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

其中  $F(v)$  为曲线  $f(x, y) = v_1$  与  $f(x, y) = v_2$  所包围的面积.

**提示** 用函数的无限接近的等值线把积分域  $S(v_1, v_2)$  分为许多子域, 并利用积分中值定理及微分中值定理, 即可获证.

**证** 作  $[v_1, v_2]$  的任一分划  $T$ :  $v_1 = v'_0 < v'_1 < \dots < v'_i < \dots < v'_n = v_2$ .

令  $d(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta v_i$ , 这里  $\Delta v_i = v'_i - v'_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 于是, 由积分中值定理 (这里假定了  $f(x, y)$  在  $S(v_1, v_2)$  上连续) 知,

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{S(v'_{i-1}, v'_i)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta S_i,$$

其中  $\Delta S_i$  表小环形域  $S(v'_{i-1}, v'_i)$  (如图 8.33 阴影部分所示) 的面积,

$\bar{P}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S(v'_{i-1}, v'_i)$ .

令  $v_i^* = f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ , 则  $v'_{i-1} \leq v_i^* \leq v'_i$ . 又显然 (利用微分中值定理) 有

$$\Delta S_i = F(v'_i) - F(v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i)(v'_i - v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i) \Delta v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

其中  $v'_{i-1} \leq \bar{v}_i \leq v'_i$ . 这里我们假定了  $F'(v)$  在  $[v_1, v_2]$  上存在且可积, 于是它有界, 即

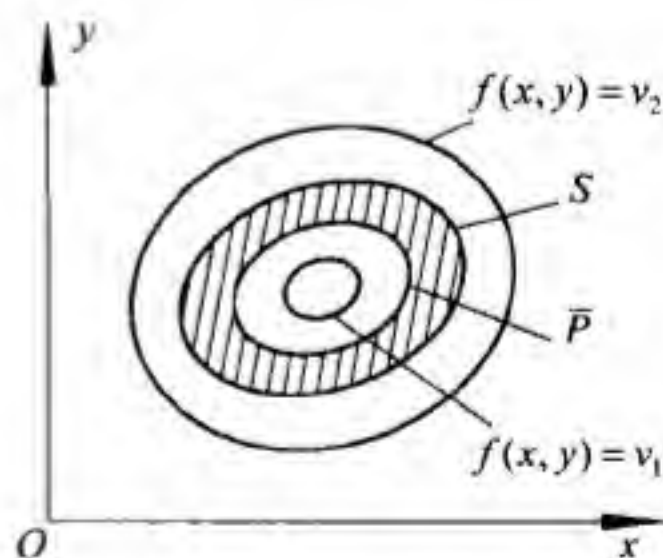


图 8.33



$$|F'(v)| \leq M = \text{常数} \quad (v_1 \leq v \leq v_2). \quad (1)$$

我们有

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n v_i^* F'(\bar{v}_i) \Delta v_i = I_1 + I_2, \quad (2)$$

其中

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^n (v_i^* - \bar{v}_i) F'(\bar{v}_i) \Delta v_i.$$

由于  $F'(v)$  在  $[v_1, v_2]$  上可积, 故  $vF'(v)$  也在  $[v_1, v_2]$  上可积. 因此,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_1 = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv. \quad (3)$$

另一方面, 由(1)式知

$$|I_2| \leq M d(T) \sum_{i=1}^n \Delta v_i = M(v_2 - v_1) d(T),$$

故

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_2 = 0. \quad (4)$$

现在(2)式两端令  $d(T) \rightarrow 0$  取极限(注意(2)式左端是常数), 并注意到(3)式与(4)式, 即得

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

证毕.

应当指出, 正如上面所说的, 本题应假定  $f(x, y)$  在  $S(v_1, v_2)$  上连续, 而  $F'(v)$  在  $[v_1, v_2]$  上存在并且可积.

## § 2. 面积的计算法

$Oxy$  平面上区域  $S$  的面积由以下公式给出:  $S = \iint_S dx dy$ .

求下列曲线所界的面积:

**【3984】**  $xy = a^2, x + y = \frac{5a}{2} \quad (a > 0).$

解 两曲线的交点为  $A(\frac{a}{2}, 2a)$  和  $B(2a, \frac{a}{2})$  (图 8.34), 故所求面积为

$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a}{x}}^{\frac{5a}{2}-x} dy = \frac{15}{8}a^2 - 2a^2 \ln 2.$$

**【3985】**  $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0).$

解 曲线的交点为  $A(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq})$  和  $B(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq})$  (图 8.35),

故所求面积为  $S = 2 \int_0^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}} dx = \frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$

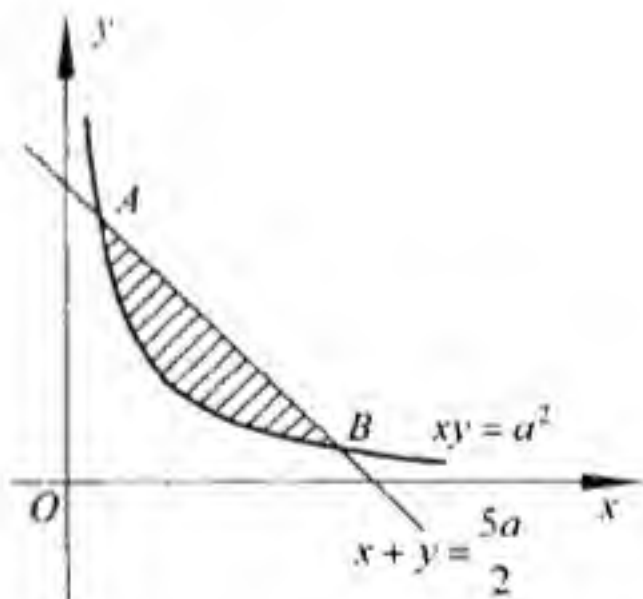


图 8.34

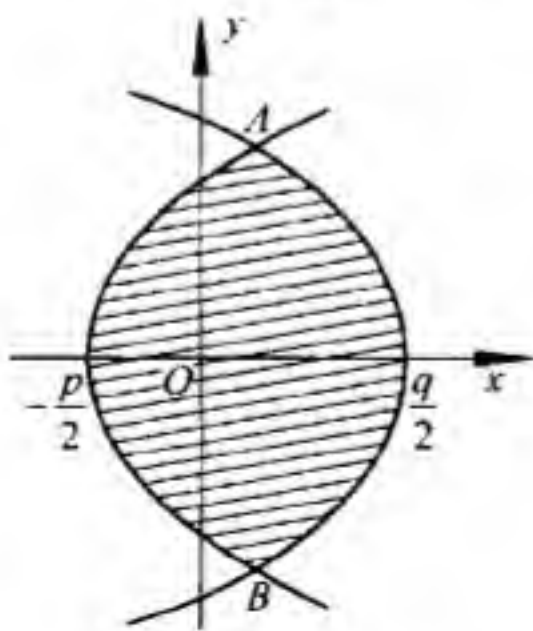


图 8.35

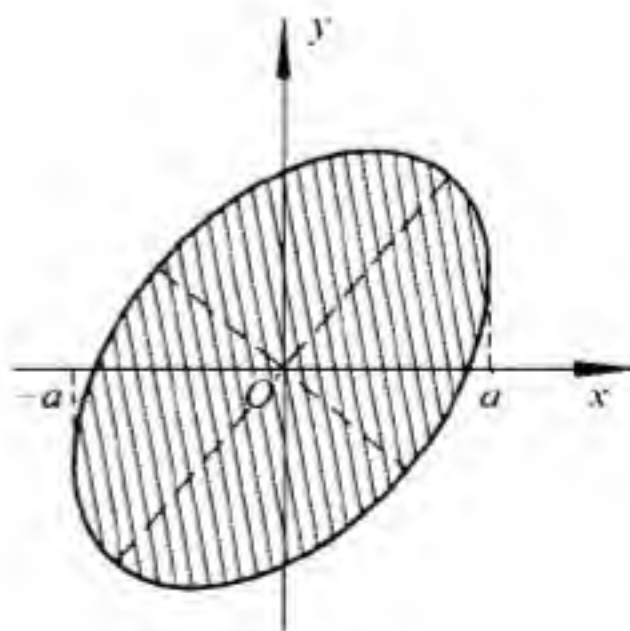


图 8.36

**【3986】**  $(x-y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0)$ .

解 如图 8.36 所示, 所求面积的区域为:

$$-a \leq x \leq a, \quad x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \int_{-a}^a dx \int_{x - \sqrt{a^2 - x^2}}^{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dy = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^2.$$

变换为极坐标, 计算下列曲线所围的面积:

**【3987】**  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); \quad x^2 + y^2 \geq a^2$ .

解 曲线的极坐标方程为  $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi; \quad r \geq a$ .

它们的交点在第一象限内为  $(a, \frac{\pi}{6})$ , 如图 8.37 所示. 利用对称性,

得所求面积为

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2 \cos 2\varphi - a^2) d\varphi = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2.$$

**【3988】**  $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2; \quad x \geq 0, y \geq 0$ .

解 将方程化为极坐标方程, 得  $(r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta)^2 = r^2$ ,

即

$$r^2 = \frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

曲线所围的面积为

$$S = \iint r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} \right),$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \tan \frac{\theta + \frac{\pi}{4}}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \ln \tan \frac{3\pi}{8} - \ln \tan \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right) = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)}{2\left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \frac{1}{2}} = 2 \arctan(\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

于是, 所求的面积为  $S = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{6}$ .

\* ) 利用 2053 题的结果, 其中  $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, A = 2, B = 0$ .

**【3989】**  $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2) \quad (a > 0)$ .

解 显然曲线关于  $Ox$  轴对称, 故只要求出  $y \geq 0$  的部分. 化为极坐标, 方程为

$$r = a \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3).$$

由于必须  $x^3 - 3xy^2 \geq 0$ , 故  $\cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \geq 0$ . 因此,  $\cos \theta \geq 0$  且  $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $\cos \theta \leq 0$  且  $\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故

$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}, -\pi + \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ . 于是, 在  $Ox$  轴的上方部分 ( $y \geq 0$ ) 为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{和} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}.$$

由此可知

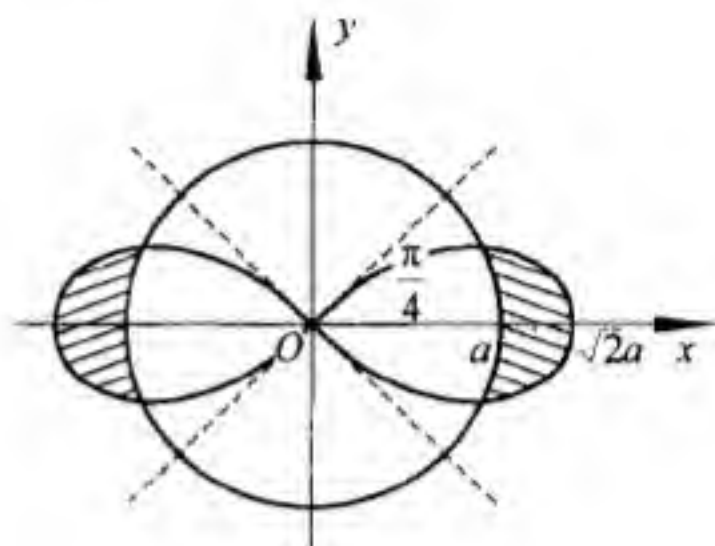


图 8.37



$$S = \iint_S r dr d\theta = 2 \left( \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{\pi}{6}} r^2 d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta.$$

在上式右端第二个积分中作代换  $\theta = \pi - \varphi$ , 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta.$$

故 
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (16 \cos^6 \theta - 24 \cos^4 \theta + 9 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= a^2 \left( 16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 24 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

**【3990】**  $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy$ ;  $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$  ( $a > 0$ ).

解 将方程化为极坐标方程, 得(双纽线)

$$r^4 = 8a^2 r^2 \cos \theta \sin \theta, \quad \text{即} \quad r = 2a \sqrt{\sin 2\theta};$$

与圆周  $(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta - a)^2 = a^2$ , 即  $r = a(\cos \theta + \sin \theta) \pm a \sqrt{\sin 2\theta}$ .

显然, 两条曲线关于射线  $\theta = \frac{\pi}{4}$  是对称的. 令

$$2a \sqrt{\sin 2\theta} = a(\cos \theta + \sin \theta) - a \sqrt{\sin 2\theta},$$

解得交点的极角  $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}$ . 于是, 所求的面积为

$$S = \iint_S r dr d\theta = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{ (2a \sqrt{\sin 2\theta})^2 - [a(\cos \theta + \sin \theta) - a \sqrt{\sin 2\theta}]^2 \right\} d\theta$$

$$= \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} [2a^2 \sin 2\theta + 2a^2 (\sin \theta + \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} - a^2] d\theta.$$

注意到  $\int (\sin \theta + \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} (\sin \theta - \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} + \frac{1}{2} \arcsin(\sin \theta - \cos \theta) + C'$ , 即得

$$S = a^2 \left[ -\cos 2\theta + (\sin \theta - \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} + \arcsin(\sin \theta - \cos \theta) - \theta \right] \Big|_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a^2 \left[ -\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{14}}{4} \sqrt{\frac{1}{8}} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right] = a^2 \left( \frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right)$$

$$= a^2 \left( \frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right).$$

\* ) 利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin 2x} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \sqrt{\tan x}, \quad \sqrt{\sin 2x} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \sqrt{\cot x}$$

化为二项微分式的积分, 参看 А. Ф. Тимофеев 《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ》第五章 § 15.

\*\* ) 容易证明:  $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}$ . 事实上, 我们有

$$\sin \left( \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right) = \frac{3\sqrt{14}}{32} + \frac{5\sqrt{14}}{32} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据以下公式引入广义极坐标  $r$  和  $\varphi$ :

$$x = a \cos^{\alpha} \varphi, \quad y = b r \sin^{\alpha} \varphi \quad (r \geq 0),$$

其中  $a, b$  和  $\alpha$  为以适当的方法选出的常数, 且考虑到  $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha a b r \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$ , 求由下列曲线所围的面积(假定参数是正的):

**【3991】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$

解 不失一般性, 设  $k > 0, h > 0$ . 令  $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$ , 则方程化为

$$r = \frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi,$$

由于  $r \geq 0$ , 故有

$$\frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi \geq 0,$$

因此, 首先必须  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ . 同时, 应有  $\cos \varphi \geq 0$  且  $\tan \varphi \geq -\frac{ak}{bh}$  或者  $\cos \varphi < 0$  且  $\tan \varphi \leq -\frac{ak}{bh}$ .

从而, 极角  $\varphi$  应满足不等式  $-\arctan \frac{ak}{bh} \leq \varphi \leq \pi - \arctan \frac{ak}{bh}$ . 于是, 曲线所围的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} a b r \, dr \, d\varphi = \frac{ab}{2} \int_{-\arctan \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctan \frac{ak}{bh}} \left( \frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi \right)^2 d\varphi = \frac{ab}{2} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \int_{-\arctan \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctan \frac{ak}{bh}} \sin^2(\varphi + \alpha_0) d\varphi,$$

其中  $\alpha_0 = \arctan \frac{ak}{bh}$ . 从而, 我们有

$$S = \frac{ab}{2} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \left[ \frac{\varphi + \alpha_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(\varphi + \alpha_0) \right] \Big|_{-\arctan \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctan \frac{ak}{bh}} = \frac{ab}{2} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).$$

**【3992】**  $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; \quad x=0, y=0.$

解 令  $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$ , 则方程化为

$$r = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

于是, 曲线所围的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} a b r \, dr \, d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4 \varphi + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi.$$

根据 H. M. 雷日克、H. C. 格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126 知:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{1}{(1 + \tan^3 \varphi)} d(\tan \varphi) \\ &= \frac{\tan \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] + C. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \left\{ \frac{\tan \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h}\right)^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \int \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{\tan^4 \varphi}{(1 + \tan^3 \varphi)^2} d(\tan \varphi) = \frac{\tan^5 \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \int \frac{\tan^4 \varphi}{1 + \tan^3 \varphi} d(\tan \varphi) \\ &= \frac{\tan^5 \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\tan^2 \varphi}{2} + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} - \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} + C, \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^4 \left\{ \frac{\tan^5 \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} - \frac{\tan^2 \varphi}{3} - \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} - \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4; \end{aligned}$$



此外,还有

$$\int \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} = \int \frac{\tan^2 \varphi}{(1 + \tan^3 \varphi)^2} d(\tan \varphi) = -\frac{1}{3(1 + \tan^3 \varphi)} + C.$$

从而,

$$\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi = ab \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[ -\frac{1}{3(1 + \tan^3 \varphi)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2.$$

于是,曲线所围的面积为

$$S = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h}\right)^4 + \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4 + \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{ab}{3} \left[ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} \right].$$

**【3993】**  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$

解 解法 1:

令  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$ , 则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是,曲线所围的面积为  $S = \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi.$

注意到

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi &= \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) = -\frac{1}{3(1 + \tan \varphi)^3} + C, \\ \int \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi &= \int \frac{\tan^2 \varphi}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) = \int \frac{(\tan \varphi - 1)(\tan \varphi + 1) + 1}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) \\ &= \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^2} d(\tan \varphi) - 2 \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^3} d(\tan \varphi) + \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) \\ &= -\frac{1}{1 + \tan \varphi} + \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^3} + C. \end{aligned}$$

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[ -\frac{1}{3(1 + \tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} + \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[ -\frac{1}{1 + \tan \varphi} + \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^2} - \frac{1}{3(1 + \tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{ab}{6} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

解法 2:

令  $x = hr \cos \varphi$ ,  $y = kr \sin \varphi$ , 则方程化为

$$r^2 = \frac{1}{\left(\frac{h}{a} \cos \varphi + \frac{k}{b} \sin \varphi\right)^4} = \left[ \frac{a^2 b^2}{(hb)^2 + (ka)^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\varphi + \alpha)} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),$$

其中  $\tan \alpha = \frac{hb}{ka}$ . 于是,曲线所围的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S hkr dr d\varphi = \frac{hka^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi + \alpha)} \\ &= \frac{hka^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \left[ -\frac{1}{6} \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha)} - \frac{1}{3} \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \\ &= \frac{hka^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \right) + \frac{1}{3} (\tan \alpha + \cot \alpha) \right] \\ &= \frac{hka^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \cdot \frac{1}{6} \frac{[(hb)^2 + (ka)^2]^3}{(hbka)^3} = \frac{ab}{6} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

\* ) 利用 2012 题的结果.

\*\* ) 由  $\tan \alpha = \frac{hb}{ka}$  知:  $\cot \alpha = \frac{ka}{hb}$ ,  $\sin \alpha = \frac{hb}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{ka}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}}$ .

【3994】  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$

解 令  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ , 则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4}.$$

由于  $\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi \geq 0$ ,  $\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 \geq \tan^2 \varphi$ ,

注意到  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 可知极角的变化区间为  $0 \leq \varphi \leq \arctan \frac{ak}{bh}$ .

于是, 注意利用上题中两个不定积分的结果, 即得曲线所围的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} r^2 d\varphi = \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[ -\frac{1}{3(1+\tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[ -\frac{3\tan^2 \varphi + 3\tan \varphi + 1}{3(1+\tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[ \frac{-1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3} + 1 \right] + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[ \frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 + 3\left(\frac{ak}{bh}\right) + 1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3} - 1 \right] \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{(ak)^3 + 3(ak)^2 bh + 3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3} + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \frac{-(ak)^3}{(ak+bh)^3} \\ &= \frac{a^4 bk}{6h^2(ak+bh)^3} (a^2 k^2 + 3akbh + 2b^2 h^2) = \frac{a^4 bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}. \end{aligned}$$

【3995】  $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1; x=0, y=0.$

提示 作变换  $x = a \cos^4 \varphi$ ,  $y = b \sin^4 \varphi$ , 则方程化为  $r=1$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ).

解 令  $x = a \cos^4 \varphi$ ,  $y = b \sin^4 \varphi$ , 则方程化为

$$r=1 \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是, 曲线所围的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S 8ab r \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi = 4ab \int_0^1 u^7 (1-u^2)^3 du \\ &= 4ab \int_0^1 (u^7 - 3u^9 + 3u^{11} - u^{13}) du = 4ab \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} \right) = \frac{ab}{70}. \end{aligned}$$

进行适当的变量代换, 求下列曲线所围的面积:

【3996】  $x+y=a, x+y=b, y=ax, y=\beta x$  ( $0 < a < b; 0 < \alpha < \beta$ ).

提示 作变换  $x+y=u, \frac{y}{x}=v$ , 则  $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta$ , 且有  $|I| = \frac{u}{(1+v)^2}$ .

解 作变换  $x+y=u, \frac{y}{x}=v$ , 则  $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta$ , 且有  $|I| = \frac{u}{(1+v)^2}$ .

于是, 所求的面积为  $S = \int_a^b u du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$

【3997】  $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$  ( $x>0; y>0$ ).

提示 作变换  $xy=u, \frac{y}{x}=v$ , 则  $a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2$ , 且有  $|I| = \frac{1}{2v}$ .



解 作变换  $xy=u, \frac{y}{x}=v$ , 则  $a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2$ , 且有  $|I| = \frac{1}{2v}$ .

于是, 所求的面积为 
$$S = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} a^2 \ln 2.$$

【3998】  $y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy (0 < p < q; 0 < r < s)$ .

提示 作变换  $\frac{y^2}{x} = u, \frac{x^2}{y} = v$ , 则  $2p \leq u \leq 2q, 2r \leq v \leq 2s$ , 且有  $|I| = \frac{1}{3}$ .

解 作变换  $\frac{y^2}{x} = u, \frac{x^2}{y} = v$ , 则  $2p \leq u \leq 2q, 2r \leq v \leq 2s$ , 且有  $|I| = \frac{1}{3}$ .

于是, 所求的面积为 
$$S = \frac{1}{3} \int_{2p}^{2q} du \int_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3} (q-p)(s-r).$$

【3999】  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b} (a > 0, b > 0)$ .

提示 作变换  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \frac{x}{y} = v$ , 即

$$x = \frac{u^2 v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}, \quad y = \frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则  $1 \leq u \leq 2, \frac{a}{4b} \leq v \leq \frac{a}{b}$ , 且有 
$$|I| = \frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

解 作变换  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \frac{x}{y} = v$ , 即

$$x = \frac{u^2 v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}, \quad y = \frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则  $1 \leq u \leq 2, \frac{a}{4b} \leq v \leq \frac{a}{b}$ , 且有

$$|I| = \frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2u^3 du \int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} = \frac{15}{2} \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \frac{2atdt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} \\ &= 15a \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left[ \frac{1}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}} + t\right)^4} \right] dt = 15a \left( \frac{7b}{72} - \frac{37b}{648} \right) = \frac{65ab}{108}. \end{aligned}$$

\* ) 作代换  $v = at^2$ .

【4000】  $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$ , 其中  $\lambda$  取下列各值:

$$\frac{1}{3}c^2, \quad \frac{2}{3}c^2, \quad \frac{4}{3}c^2, \quad \frac{5}{3}c^2 \quad (x > 0, y > 0).$$

解 方程  $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$  可变为  $\lambda^2 - (x^2 + y^2 + c^2)\lambda + c^2 x^2 = 0$ .

将  $\lambda$  作为未知量解方程, 不妨记方程的两个解为  $\lambda$  及  $\mu$ , 则

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}}{2}, \quad \mu = \frac{x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换,将 $(x, y)$ 变为 $(\lambda, \mu)$ . 易知

$$\left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} \right| = \frac{4c^2 xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}} = \frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}{\lambda - \mu},$$

从而,

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{1}{\frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)}} = \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}.$$

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} dx dy = \iint_{\substack{\frac{4c^2}{3} \leq \lambda \leq \frac{5c^2}{3} \\ \frac{c^2}{3} \leq \mu \leq \frac{2c^2}{3}}} \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}} d\lambda d\mu = \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{u - v}{\sqrt{uv(1 - v)(u - 1)}} du dv \\ &= \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{u - 1}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1 - v)}} - \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u - 1)}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{1 - v}}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u - 1}} du &= \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, & \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u - 1)}} &= 2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \\ \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1 - v)}} &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}, & \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1 - v}} dv &= \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

故最后得

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^2}{4} \left[ \left( \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \left( 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] - \frac{c^2}{4} \left[ \left( 2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \\ &= \frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**【4001】** 求椭圆 $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$  (其中 $\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ )的面积.

提示 作变换 $a_1 x + b_1 y + c_1 = u$ ,  $a_2 x + b_2 y + c_2 = v$ , 则椭圆所围区域变为 $u^2 + v^2 \leq 1$ , 且有 $|I| = \frac{1}{|\delta|}$ .

解 作变换 $a_1 x + b_1 y + c_1 = u$ ,  $a_2 x + b_2 y + c_2 = v$ , 则椭圆所围区域变为 $u^2 + v^2 \leq 1$ , 且有 $|I| = \frac{1}{|\delta|}$ .

于是,所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} du dv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

**【4002】** 求椭圆

$$\frac{x^2}{ch^2 u} + \frac{y^2}{sh^2 u} = c^2 \quad (u = u_1, u_2)$$

和双曲线  $\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 \quad (v = v_1, v_2) \quad (0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$

所围的面积.

提示 作变换 $x = cchucosv$ ,  $y = cshusinv$ , 则有 $|I| = |c^2 ch^2 u - c^2 \cos^2 v|$ .

解 作变换 $x = cchucosv$ ,  $y = cshusinv$ , 则有 $|I| = |c^2 ch^2 u - c^2 \cos^2 v|$ .

因为 $ch^2 u \geq 1 \geq \cos^2 v$ , 故所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= c^2 \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} (ch^2 u - \cos^2 v) du dv = c^2 [(v_2 - v_1) \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + ch 2u}{2} du - (u_2 - u_1) \int_{v_1}^{v_2} \cos^2 v dv] \\ &= \frac{c^2}{4} [(v_2 - v_1)(sh 2u_2 - sh 2u_1) - (u_2 - u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]. \end{aligned}$$

**【4003】** 求平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程,作变量代换

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z,$$



这是一个正交变换,故  $Ox'y'z'$  成为一新的直角坐标系. 在新的坐标系下,平面方程为

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$ ,  $y = -\frac{\sqrt{6}}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$ ,  $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$ ,

故有  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2).$

从而,曲面方程变为  $x'^2 + y'^2 = \frac{2}{3}a^2$ . 于是,所求的面积为

$$S = \iint_{x'^2 + y'^2 \leq \frac{2}{3}a^2} dx' dy' = \frac{2}{3}\pi a^2.$$

**【4004】** 求平面  $z = 1 - 2(x+y)$  与曲面  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  相截所得截断面之面积.

**解** 平面被曲面所截部分记为  $S$ ,它在  $Oxy$  平面上的投影记为  $D$ . 由于平面  $z = 1 - 2(x+y)$  的法线之方向余弦为  $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$ ,  $\cos\gamma = \frac{1}{3}$ ,故  $D = S\cos\gamma = \frac{1}{3}S$ ,从而,  $S = 3D$ ,显然  $D$  为  $Oxy$  平面上由曲线  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{1-2(x+y)} = 0$  (也即  $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$ ) 所围的区域. 作变量代换

$$x = u + v + \frac{1}{7}, \quad y = u - v + \frac{1}{7}.$$

于是,  $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -2$ ,且曲线  $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$  变为  $7u^2 + v^2 - \frac{1}{7} = 0$ ,这是一个椭圆(在  $uv$  平面上). 从而,即得

$$D = \iint_D dx dy = 2 \iint_{49u^2 + 7v^2 \leq 1} du dv = 2\pi \left(\frac{1}{7}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此,最后得

$$S = 3D = \frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

### § 3. 体积的计算法

如图 8.38 所示,设柱体顶面位于连续曲面  $z = f(x,y)$ ,底面位于平面  $z = 0$ ,侧面垂直于底面,且底面在平面  $Oxy$  上所占区域  $\Omega$  是可求积的,则,柱体的体积等于

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy.$$

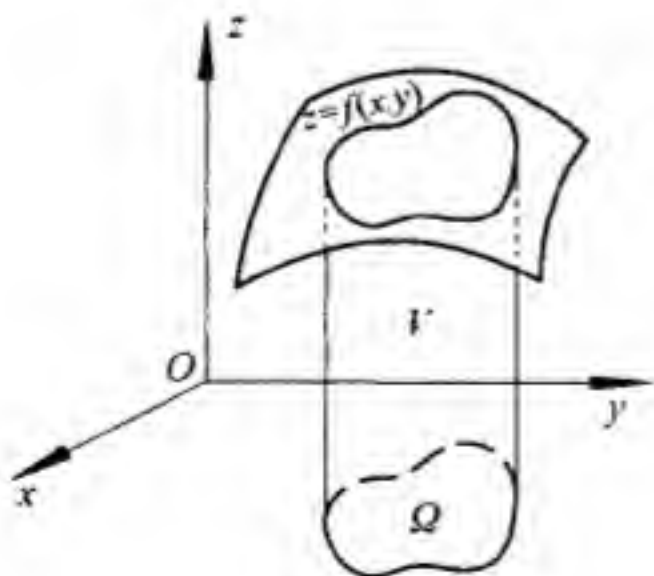


图 8.38

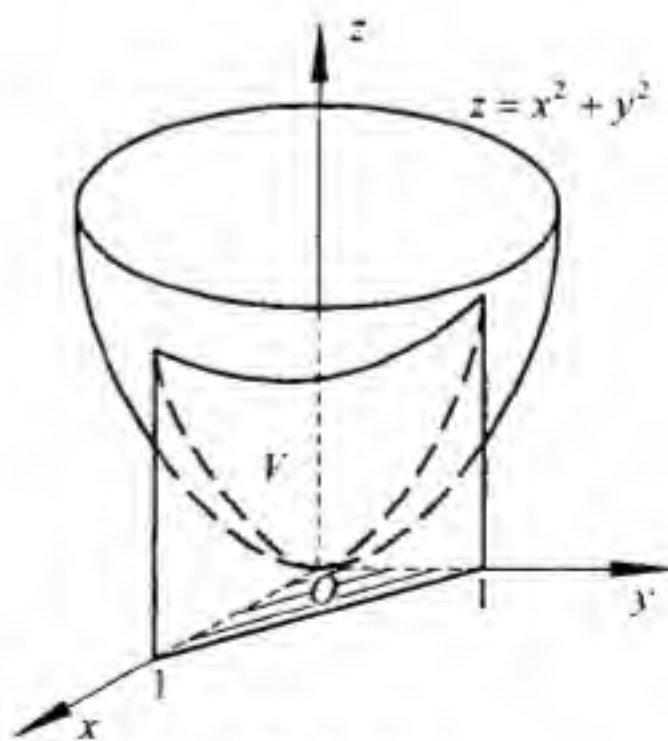


图 8.39

【4005】 试绘出一物体,其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy.$$

解 积分域为三角形  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$ .

柱体上顶为旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$ . 物体的形状如图 8.39 所示.

【4006】 绘出下列二重积分所表示的体积:

(1)  $\iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy;$

(2)  $\iint_{\substack{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$

(3)  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy;$

(4)  $\iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$

(5)  $\iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy;$

(6)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

解 (1) 积分域为三角形  $0 \leq x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ . 柱体的上顶为平面  $z = x+y$  (图 8.40).

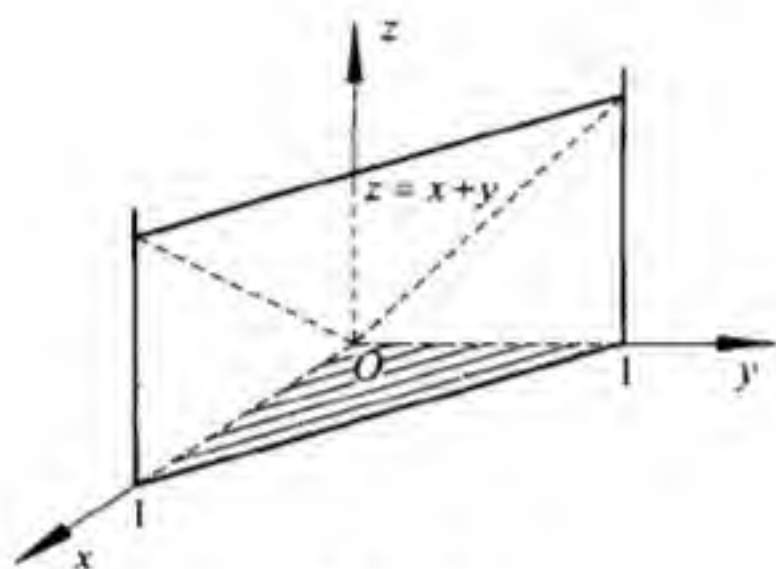


图 8.40

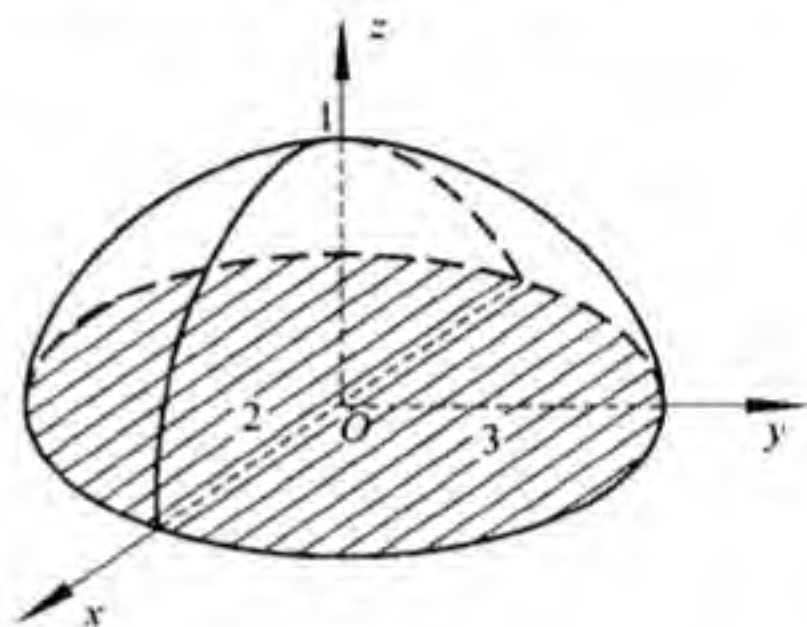


图 8.41

(2) 积分域为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ , 即立体的底面, 顶面为椭球面  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$  (图 8.41).

(3) 积分域为由直线  $x+y=1, x+y=-1, x-y=1, y-x=1$  围成的正方形. 柱体的顶面为旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$ . 图 8.42 仅画了第一卦限部分的体积.

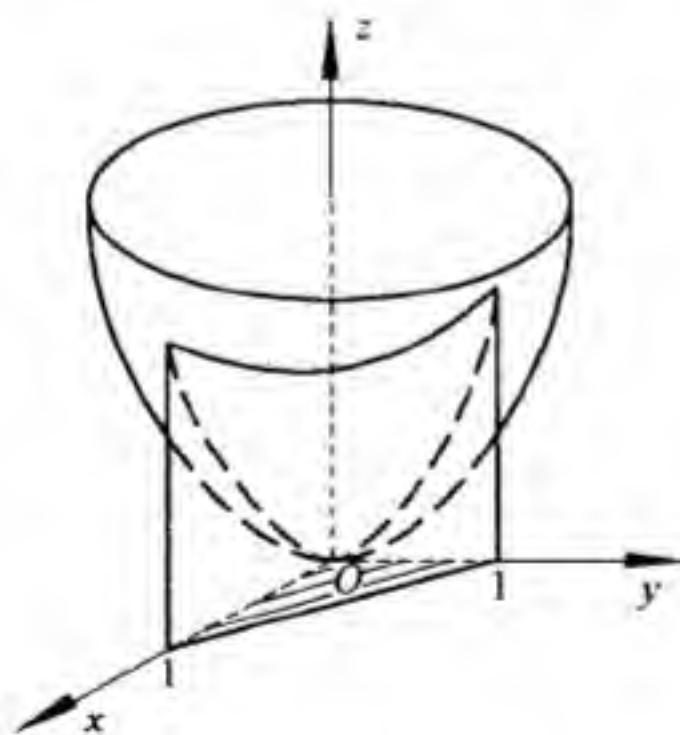


图 8.42

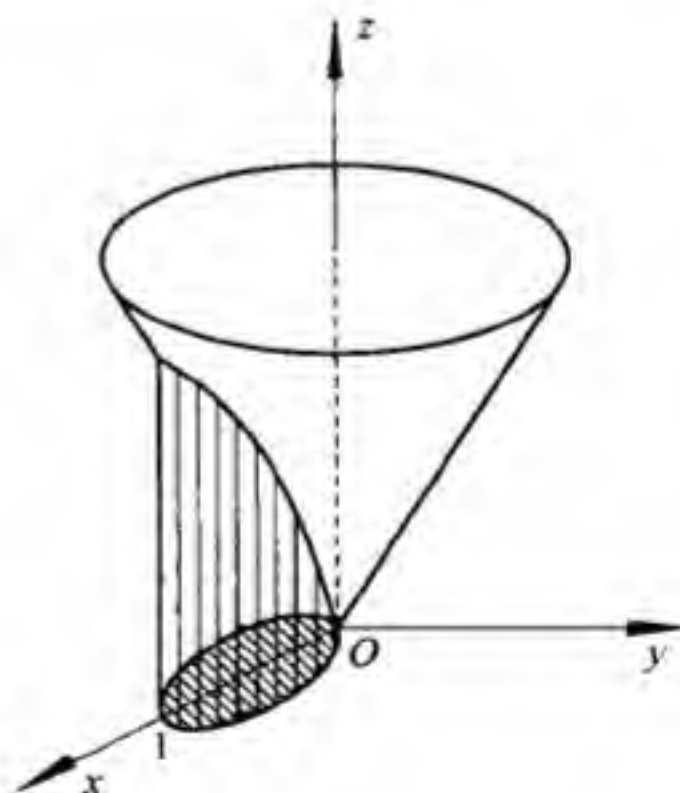


图 8.43

(4) 积分域为圆  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ . 柱体的顶面为圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (图 8.43).

(5) 积分域为梯形  $1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$ . 柱体的顶面为双曲抛物面  $z = \sqrt{xy}$  (图 8.44).



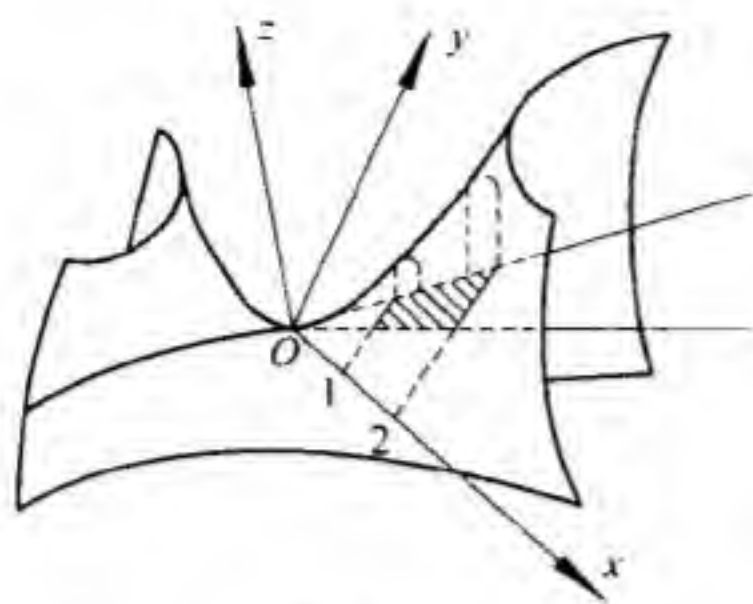


图 8.44

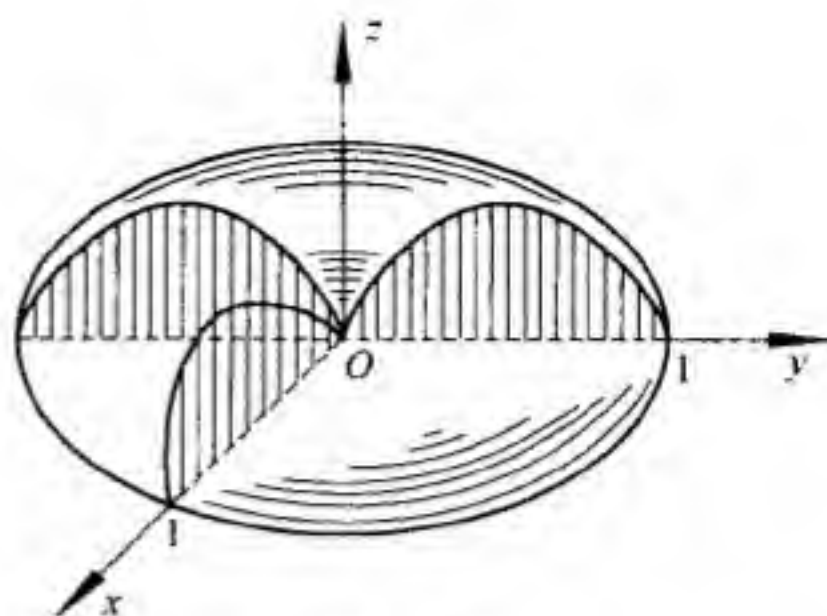


图 8.45

(6) 积分域为圆  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 即立体的底面, 顶面是由正弦曲线  $z = \sin \pi x$  绕  $Oz$  轴旋转一周而得的旋转曲面(图 8.45).

求下列曲面所围区域的体积:

**【4007】**  $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$ .

解  $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + x + y) dy = \int_0^1 \left( \frac{3}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{5}{6}$ .

**【4008】**  $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0 (a \geq R\sqrt{2})$ .

解  $V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (a - x - y) dy = \int_0^R \left[ (a - x) \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R^2 - x^2}{2} \right] dx$   
 $= \int_0^R a \sqrt{R^2 - x^2} dx - \int_0^R \left( x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2 - x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi a R^2}{4} - \frac{2R^3}{3}$ .

**【4009】**  $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$ .

解  $V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105}$ .

**【4010】**  $z = \cos x \cos y, z = 0, |x + y| \leq \frac{\pi}{2}, |x - y| \leq \frac{\pi}{2}$ .

提示 注意函数  $z = \cos x \cos y$  的图像关于  $Oyz$  平面对称, 而积分域关于  $Oy$  轴对称.

解 因函数  $z = \cos x \cos y$  的图像关于  $Oyz$  平面对称, 而积分域(图 8.46)关于  $Oy$  轴对称, 故所求的体积为

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \cos x \cos y dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 4 \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

**【4011】**  $z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi$ .

解  $V = \int_0^\pi dx \int_0^x \sin \frac{\pi y}{2x} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi$ .

**【4012】**  $z = xy, x + y + z = 1, z = 0$ .

提示 注意所求的体积  $V$  由两部分组成:

$$V_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}, z = xy.$$

$$V_2: 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x, z = 1-x-y.$$

解 体积  $V$  由两部分组成:

$$V_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}, z = xy.$$

$$V_2: 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x, z = 1-x-y.$$

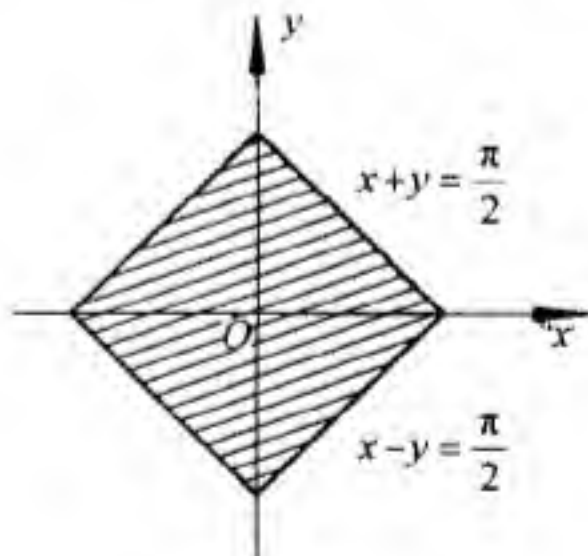


图 8.46

它们在  $Oxy$  平面上的投影域  $\Omega_1$  及  $\Omega_2$  如图 8.47 所示, 于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy = \left(-\frac{11}{4} + 4\ln 2\right) + \left(\frac{25}{6} - 6\ln 2\right) = \frac{17}{12} - 2\ln 2. \end{aligned}$$

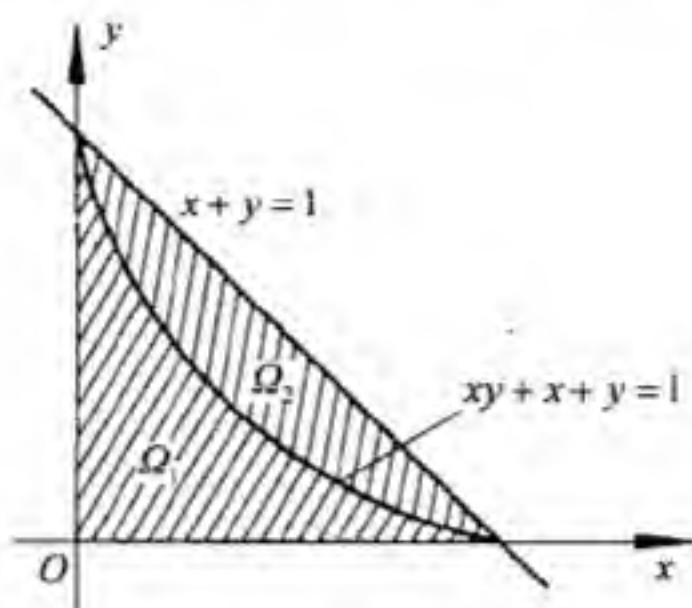


图 8.47

变换成极坐标, 求下列曲面所围区域的体积:

【4013】  $z^2 = xy$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ .

提示 注意对称性, 令  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$ , 并利用 3856 题的结果.

解 因为  $z = \sqrt{xy}$ , 故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{xy} dx dy = 4 \int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi \sin\varphi} r^2 d\varphi = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\varphi \sin^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi \\ &= \frac{4}{3} a^3 \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

【4014】  $z = x + y$ ,  $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ ,  $z = 0$  ( $x > 0, y > 0$ ).

提示 令  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$ , 并利用 3856 题的结果.

解 令  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$ , 则方程  $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$  及  $z = x + y$  变为

$$r^2 = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \quad \text{及} \quad z = r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 (\cos\varphi + \sin\varphi) dr = \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\frac{5}{2}}\varphi \cos^{\frac{3}{2}}\varphi + \cos^{\frac{5}{2}}\varphi \sin^{\frac{3}{2}}\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} B\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

【4015】  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = x$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $z = 0$ .

解 令  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$ , 则方程  $x^2 + y^2 = x$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  及  $z = x^2 + y^2$  变为

$$r = \cos\varphi, \quad r = 2\cos\varphi \quad \text{及} \quad z = r^2.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 dr = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16\cos^4\varphi - \cos^4\varphi) d\varphi = \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi$$



$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{45}{32}\pi.$$

**【4016】**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 \geq a|x|$  ( $a > 0$ ).

解 只需计算由下列曲面所围区域的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 \leq a|x|.$$

若引用极坐标, 则  $r^2 + z^2 = a^2$ ,  $r^2 \leq a|r \cos \varphi|$ , 其体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= 8 \iint_{\substack{r^2 + z^2 \leq a^2 \\ x^2 + y^2 \leq ar \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r \sqrt{a^2 - r^2} dr = -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{a \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}. \end{aligned}$$

于是, 所求的体积为  $V = \frac{4\pi a^3}{3} - \left( \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9} \right) = \frac{16a^3}{9}.$

**【4017】**  $x^2 + y^2 - az = 0$ ,  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $z = 0$  ( $a > 0$ ).

解 若引用极坐标, 则有  $z = \frac{r^2}{a}$ ,  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$  ( $a > 0$ ).

于是, 利用对称性知, 所求的体积为

$$V = 4 \iint_D \frac{1}{a}(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r^2}{a} r dr = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}.$$

**【4018】**  $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$ .

解 利用对称性, 得所求的体积为

$$V = 4 \iint_{\substack{r^2 + z^2 \leq R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

**【4019】**  $z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y = x \tan \alpha$ ,  $y = x \tan \beta$  ( $a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ ).

解 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a} dx dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^a c r \cos \frac{\pi r}{2a} dr = c(\beta - \alpha) \left[ \frac{2ar}{\pi} \sin \frac{\pi r}{2a} + \frac{4a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi r}{2a} \right] \bigg|_0^a \\ &= 2a^2 c(\beta - \alpha) \left( \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) = \frac{2a^2 c(\beta - \alpha)(\pi - 2)}{\pi^2}. \end{aligned}$$

**【4020】**  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x + y$ .

提示 注意两曲面的交线在  $Oxy$  平面上的投影域的围线为圆

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \text{或} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

故令  $x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi$ ,  $y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad \text{及} \quad z = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

解 立体的投影域的围线为  $x^2 + y^2 = x + y$  或  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ . 若引用代换  $x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi$ ,

$y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi$ , 则有

$$z = r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi), \quad z = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 所求的体积为

$$V = \iint_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} [(x + y) - (x^2 + y^2)] dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ [1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)] - [r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos\varphi+\sin\varphi)] \right\} r dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

求下列曲面所围区域的体积(假定参数是正的):

**【4021】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0).$

提示 注意两曲面的交线在  $Oxy$  平面上的投影域的围线为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ , 故令  $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c\sqrt{1-r^2} \quad \text{及} \quad z = cr \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

解 两曲面的交线在  $Oxy$  平面上的投影为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ . 令  $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$ , 则方程化为

$$z = c\sqrt{1-r^2} \quad \text{及} \quad z = cr \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \left[ c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} abr(c\sqrt{1-r^2} - cr) dr \\
&= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r\sqrt{1-r^2} - r^2) dr = -\frac{1}{3}abc \int_0^{2\pi} \left[ r^3 + (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

**【4022】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

提示 令  $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = \pm c\sqrt{1+r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

解 若令  $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = \pm c\sqrt{1+r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} 2c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2abcr\sqrt{1+r^2} dr = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2} dr \\
&= \frac{4\pi}{3}abc(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

**【4023】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z=0.$

提示 注意立体在  $Oxy$  平面上的投影域的围线为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad \text{或} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

故令  $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, \frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c\left[\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2\right] \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

解 立体在  $Oxy$  平面上的投影域的围线为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ , 即  $\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

若令  $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$ ,  $\frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c \left[ \frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} c \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r \left[ \frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] dr \\ &= abc \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{16} \right] d\varphi = abc \frac{3 \cdot 2\pi}{16} = \frac{3}{8} \pi abc. \end{aligned}$$

**【4024】**  $\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, z=0.$

提示 令  $x = a\cos\varphi$ ,  $y = b\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c(1-r^2) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

解 若令  $x = a\cos\varphi$ ,  $y = b\sin\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c(1-r^2) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} c \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abcr(1-r^2) dr = \frac{2}{3} \pi abc.$$

**【4025】**  $\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x=0, y=0, z=0.$

提示 计算位于第一卦限(即  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ )部分的体积. 令  $x = a\cos^2\varphi$ ,  $y = b\sin^2\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt{1-r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1).$$

解 下面计算位于第一卦限部分的体积. 令  $x = a\cos^2\varphi$ ,  $y = b\sin^2\varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt{1-r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abcsin2\varphi \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= abc \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin2\varphi d\varphi \right) \left( \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr \right) = \frac{abc}{3}. \end{aligned}$$

**【4026】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

解 令  $x = a\cos\varphi$ ,  $y = b\sin\varphi$ , 则方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1-r^2}, \quad r^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos2\varphi$$

(因  $r^2 = \cos2\varphi \geq 0$ , 故  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$ ). 于是, 利用对称性知, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= 8c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 8abc \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos2\varphi}} \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi \\ &= 8abc \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} (1 - \sqrt{8} \sin^3\varphi) d\varphi = \frac{8abc}{3} \left( \varphi + \sqrt{8} \cos\varphi - \frac{\sqrt{8}}{3} \cos^3\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{8abc}{3} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{2abc}{9} (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}). \end{aligned}$$



【4027】  $z^2 = xy, x+y=a, x+y=b (0 < a < b)$ .

解 由于  $z = \pm \sqrt{xy}$ , 又所界立体在  $Oxy$  平面上的投影域  $\Omega$  由直线  $x+y=a, x+y=b, x=0$  及  $y=0$  围成. 利用对称性知, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{\Omega} \sqrt{xy} \, dx dy = 2 \left( \int_0^a dx \int_{a-x}^{b-x} \sqrt{xy} \, dy + \int_a^b dx \int_0^{b-x} \sqrt{xy} \, dy \right) \\ &= \frac{4}{3} \int_0^a [\sqrt{x(b-x)^3} - \sqrt{x(a-x)^3}] dx + \frac{4}{3} \int_a^b \sqrt{x(b-x)^3} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx - \frac{4}{3} \int_a^b (a-x) \sqrt{a(a-x)} dx. \end{aligned}$$

令  $x = b \sin^2 t$ , 可得

$$\begin{aligned} \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx &= 2b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt \\ &= 2b^3 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right) = 2b^3 \left( \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16} \pi b^3; \end{aligned}$$

同理, 有

$$\int_a^b (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx = \frac{1}{16} \pi a^3.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{4}{3} \left( \frac{\pi b^3}{16} - \frac{\pi a^3}{16} \right) = \frac{\pi}{12} (b^3 - a^3).$$

【4028】  $z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x, z = 0$ .

提示 注意曲面所围区域的立体在  $Oxy$  平面上的投影域由曲线  $xy = a^2, xy = 2a^2$  及直线  $y = \frac{x}{2}, y = 2x$  围成, 故令  $xy = ua^2, y = vx$ , 则积分域变为长方形域

$$1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2, \text{ 且 } |I| = \frac{a^2}{2v}, z = x^2 + y^2 = a^2 \left( \frac{u}{v} + uv \right).$$

再利用对称性,

解 曲面所界的立体在  $Oxy$  平面上的投影域  $\Omega$  由曲线  $xy = a^2, xy = 2a^2$  和直线  $y = \frac{x}{2}, y = 2x$  围成.

利用对称性知, 曲面所围区域的体积为  $V = 2 \iint_{\Omega} z \, dx dy = 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy$ .

作变量代换  $xy = ua^2, y = vx$ , 则积分域变为长方形域  $1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2$ , 且  $|I| = \frac{a^2}{2v}, z = x^2 + y^2 = a^2 \left( \frac{u}{v} + uv \right)$ .

于是, 所求的体积为

$$V = 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy = 2 \iint_{\substack{1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 2}} a^2 \left( \frac{u}{v} + uv \right) \frac{a^2}{2v} du dv = a^4 \int_1^2 u du \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 1 + \frac{1}{v^2} \right) dv = \frac{9}{2} a^4.$$

【4029】  $z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0$ .

提示 仿 4028 题, 令  $x = uy^2, y = vx^2$ , 则积分域  $\Omega$  变为正方形域  $\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1$ , 且  $|I| = \frac{1}{3} u^{-2} v^{-2}$ .

解 曲面所围区域的立体在  $Oxy$  平面上的投影域  $\Omega$  由曲线  $x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x$  及  $y^2 = 2x$  围成. 我们有

$$V = \iint_{\Omega} z \, dx dy = \iint_{\Omega} xy \, dx dy.$$

作变量代换

$$x=uy^2, \quad y=vx^2, \quad \text{或} \quad x=u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}, \quad y=u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域  $\Omega$  变为正方形域  $\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1$ . 且  $|I| = \frac{1}{3} u^{-2} v^{-2}$ . 于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\Omega} xy dx dy = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} v^{-3} du dv = \frac{1}{3} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} du \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

**【4030】**  $z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, \quad z=0, \quad xy=a^2, \quad y=\alpha x, \quad y=\beta x \quad (0 < \alpha < \beta; x > 0).$

**解** 曲面所界的立体在  $Oxy$  平面上的投影域  $\Omega$  由曲线  $xy=a^2$  和直线  $y=\alpha x, y=\beta x \quad (x > 0)$  围成. 于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy.$$

作变量代换  $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi$ , 则  $|I| = a^2 r$ . 于是,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy = a^2 c \int_{\arctan \alpha}^{\arctan \beta} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}} \sin(\pi r^2 \sin \varphi \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \int_{\arctan \alpha}^{\arctan \beta} \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \tan \varphi \Big|_{\arctan \alpha}^{\arctan \beta} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

**【4031】**  $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, \quad z=0, \quad x+y=1, \quad x=0, \quad y=0.$

**解** 曲面所界的立体在  $Oxy$  平面上的投影域  $\Omega$  由直线  $x+y=1, x=0, y=0$  围成. 于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy = \int_0^1 \left[ x^{\frac{3}{2}}(1-x) + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right] dx \\ &= \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 - \frac{4}{35} (1-x)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

**【4032】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad z=0.$

**提示** 令  $x = a \cos^3 \varphi, y = b r \sin^3 \varphi$ , 则曲面方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)], \quad r=1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1),$$

注意对称性, 并利用 3856 题的结果.

**解** 令  $x = a \cos^3 \varphi, y = b r \sin^3 \varphi$ , 则方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)], \quad r=1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1),$$

于是, 利用对称性知, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\Omega} z dx dy = 12abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)] r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi \\ &= 12abc \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) \\ &= 6abc \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) \\ &= 6abc \left[ \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{10} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{3\pi abc}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{105}{1920} \right) = \frac{75}{256} \pi abc. \end{aligned}$$

**【4033】**  $z = c \arctan \frac{y}{x}, \quad z=0, \quad \sqrt{x^2+y^2} = a \arctan \frac{y}{x} \quad (y \geq 0).$

**解** 令  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , 则方程化为  $z = c\varphi, r = a\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ , 于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} c\varphi r dr d\varphi = \frac{a^2 c}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{a^2 c}{8} \varphi^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4 a^2 c}{128}.$$

**【4034】**  $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x=0, y=0, z=0 (n>0)$

提示 令  $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ , 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt[n]{1-r^n} \quad (0 \leq r \leq 1).$$

在求体积  $V$  的过程中, 先后令  $r^n = t$  及  $\sin^2 \varphi = z$ , 并利用 B 函数的定义及计算公式.

解 曲面方程可表示为

$$z = c \sqrt[n]{1 - \left( \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)}.$$

若令  $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ , 则曲所围区域的体积为

$$V = c \iint_{\Omega} \sqrt[n]{1 - \left( \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} dx dy = \frac{2abc}{n} \int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}} \varphi \sin^{\frac{2-n}{n}} \varphi d\varphi.$$

若令  $r^n = t$  可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n} r dr = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{2}{n}-1} dt = B\left(\frac{1}{n}+1, \frac{2}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

令  $\sin^2 \varphi = t$  可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}} \varphi \sin^{\frac{2-n}{n}} \varphi d\varphi = \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{2n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

于是, 所求的体积为 
$$V = \frac{abc}{n^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

**【4035】**  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, x=0, y=0, z=0 (n>0, m>0).$

提示 令  $x = a \cos^2 \varphi, y = b \sin^2 \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ .

解 令  $x = a \cos^2 \varphi, y = b \sin^2 \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ , 则曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= c \iint_{\Omega} \sqrt[n]{1 - \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^n} dx dy = 2abc \int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = abc \int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n} r dr \\ &= \frac{abc}{n} B\left(\frac{1}{n}+1, \frac{2}{n}\right) = \frac{abc}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+1\right)} = \frac{abc}{n+2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

## § 4. 曲面面积的计算法

1° 曲面由显函数给出的情形 光滑曲面  $z = z(x, y)$  的面积由以下积分表示:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

其中  $\Omega$  为该曲面在  $Oxy$  平面上的投影.

2° 曲面由参数方程给出的情形 若曲面是由参数方程给出的:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$



其中  $(u, v) \in \Omega$ ,  $\Omega$  为封闭可求积的有限区域, 且函数  $x, y$  和  $z$  在区域  $\Omega$  内连续可微, 则对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

**【4036】** 求曲面  $az = xy$  包含在圆柱  $x^2 + y^2 = a^2$  内那部分的面积.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2}} \, dx dy \\ &= \frac{1}{a} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)} \, dx dy = \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 + r^2} \, dr = \frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

**【4037】** 求以曲面  $x^2 + z^2 = a^2$  和  $y^2 + z^2 = a^2$  为界的物体的表面积.

解 如图 8.48 所示, 两曲面的交线在  $Oyz$  平面上的投影为圆  $y^2 + z^2 = a^2, x=0$ .

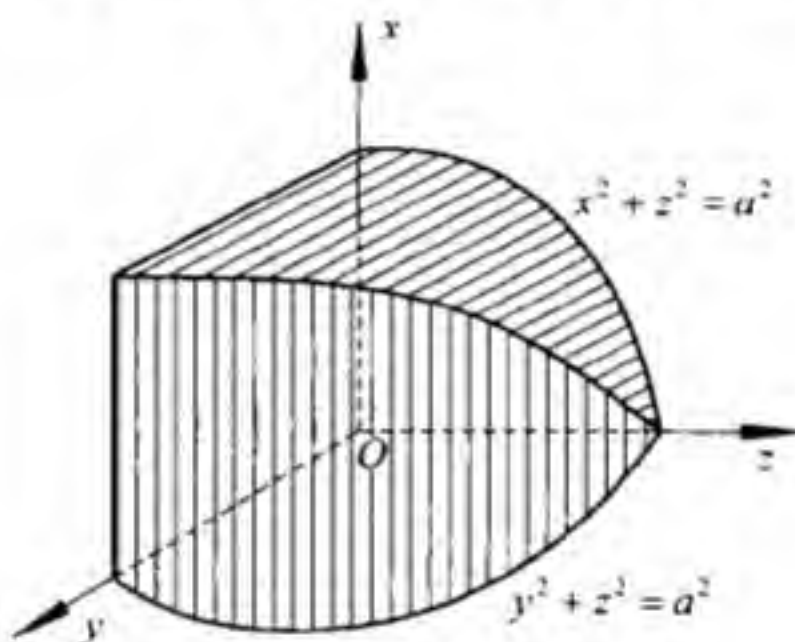


图 8.48

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} \, dy dz = 4 \cdot 4 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \sqrt{1 + 0^2 + \left(-\frac{z}{x}\right)^2} \, dy \\ &= 16 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{x^2}} \, dy = 16a \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}} \\ &= 16a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{a^2 - z^2} \, dz = 16a^2. \end{aligned}$$

**【4038】** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  包含在柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b \leq a$ ) 内那部分的面积.

解 因为  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$

又积分域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  位于第一象限部分为

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$S = 2 \cdot 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dy = 8a \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}.$$

**【4039】** 求曲面  $z^2 = 2xy$  被平面  $x + y = 1, x=0, y=0$  所截部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x+y}{\sqrt{xy}},$$

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{x+y}{\sqrt{xy}} dy = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left[ 2\sqrt{x(1-x)} + \frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x} \right] dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-x}(1+2x) d(\sqrt{x}) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}(1+2t^2) dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

【4040】 求曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  在圆柱  $x^2 + y^2 = \pm ax$  内那部分的面积(维维亚尼问题).

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积. 因为

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

于是,利用对称性知,割出部分的面积为

$$S = 8 \iint_{\Omega} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 8a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

于是,所求的面积为

$$A = 4\pi a^2 - S = 4\pi a^2 - 8a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 8a^2.$$

【4041】 求曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  包含在圆柱  $x^2 + y^2 = 2x$  内那部分的面积.

解 注意到  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2},$

又积分域为:  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi$ . 于是,所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{2} r dr = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \sqrt{2} \pi.$$

【4042】 求曲面  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  包含在柱面  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  内那部分的面积.

解 注意到  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}},$

又积分域由双纽线  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$  所围成. 于是,利用对称性知,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{2} r \frac{r \cos \varphi}{r \sqrt{\cos 2\varphi}} dr = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} d(\sqrt{2} \sin \varphi) = 2a^2 \left[ \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{2} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2} \sin \varphi) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

【4043】 求曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$  被平面  $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$  所截部分的面积.

解 因为  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ , 故所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

其中  $\Omega$  为由直线  $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$  围成的正方形域. 为便于计算,作变换

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从而积分域变为由方程  $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  围成的正方形, 且  $I = 1$ . 于是,注意利用对称性,即得所求的面

积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx dy = 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \int_{-u}^u \sqrt{1+u^2+v^2} \, dv \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ u \sqrt{1+2u^2} + \frac{1+u^2}{2} [\ln(\sqrt{1+2u^2}+u) - \ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] \right\} du \\
 &= \frac{2}{3} (1+2u^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [\ln(\sqrt{1+2u^2}+u) - \ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] d\left(u + \frac{u^3}{3}\right) \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4\left(u + \frac{u^3}{3}\right) \frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)} \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{u^3}{3}}{1+u^2} \frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+5}{t^2+1} dt \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} (\sqrt{2}-1) - \frac{8}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) + \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3} \arctan \sqrt{2} \\
 &= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7\ln 3}{4}\right) + \frac{8}{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

\* ) 作代换  $1+2u^2=t^2$ .

【4044】 求曲面  $x^2+y^2=2az$  包含在柱面  $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$  内那部分的面积.

解 注意到  $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}$ ,

又积分域由双纽线  $r^2=a^2\sin 2\varphi$  围成. 于是, 利用对称性, 即得所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \frac{1}{a} \sqrt{a^2+(x^2+y^2)} \, dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \frac{1}{a} \sqrt{a^2+r^2} r dr \\
 &= \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^3(1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3] d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi - \frac{\pi a^2}{3}.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-\varphi)]^{\frac{1}{2}} d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) d\varphi \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt = 2\sqrt{2} \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{3},
 \end{aligned}$$

故最后得

$$S = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi).$$

【4045】 求曲面  $x^2+y^2=a^2$  被平面  $x+z=0, x-z=0$  ( $x>0, y>0$ ) 所截部分的面积.

解 因为  $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ,

于是, 所求的面积为  $S = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx dz = \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dz = \int_0^a \frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a^2$ .

【4046】 求以曲面  $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$  和  $x+y+z=2a$  ( $a>0$ ) 为界的物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在  $Oxy$  平面上的投影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令  $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ , 则方程变为  $\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1$ .

由此可见, 曲面所界的物体在  $Oxy$  平面上的投影域为以  $2a$  为短半轴,  $2\sqrt{3}a$  为长半轴的椭圆.



物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成. 对于  $z=2a-x-y$ ,  $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$  分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是, 物体的表面积  $S=\iint_D \sqrt{3} dx dy + \iint_D 2 dx dy = (\sqrt{3}+2) \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a = 4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$ .

又所截圆锥之高为

$$H = \left| \frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(即坐标原点到平面  $x+y+z=2a$  的距离). 于是, 物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中  $A$  为截圆锥的底面积:  $A = \iint_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a = 12\pi a^2$ .

因此, 所求物体的体积为  $V = \frac{1}{3} \cdot 12\pi a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3$ .

**【4047】** 求球面在两条纬线和两条经线之间那部分的面积.

**解题思路** 球面的参数方程为

$$x = R \cos \varphi \cos \psi, \quad y = R \sin \varphi \cos \psi, \quad z = R \sin \psi,$$

其中  $R$  为球的半径,  $\sqrt{EG-F^2} = R^2 \cos \psi$ , 又  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ,  $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$ , 其中  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$  为经线的经度,  $\psi_1$  及  $\psi_2$  为纬线的纬度.

**解** 球面的参数方程为  $x = R \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = R \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = R \sin \psi$ ,

其中  $R$  为球的半径, 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = R^2 \cos^2 \psi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + R^2 \cos^2 \psi = R^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} = R^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi \sin \psi - R^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi + 0 = 0,$$

故  $\sqrt{EG-F^2} = R^2 \cos \psi$ . 于是, 所求的面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2 \cos \psi d\psi = (\varphi_2 - \varphi_1)(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)R^2,$$

其中  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$  为经线的经度,  $\psi_1$  及  $\psi_2$  为纬线的纬度.

**【4048】** 求螺旋面  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = h\varphi$  在  $0 < r < a$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  那部分的面积.

**解** 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

故  $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{r^2+h^2}$ . 于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2+h^2} dr = 2\pi \left[ \frac{r}{2} \sqrt{r^2+h^2} + \frac{h^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2+h^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi a \sqrt{a^2+h^2} + \pi h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2+h^2}}{h}. \end{aligned}$$

**【4049】** 求环面  $x = (b+a\cos\psi)\cos\varphi$ ,  $y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi$ ,  $z = a\sin\psi$  ( $0 < a \leq b$ )

在两条经线  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\varphi = \varphi_2$  和两条纬线  $\psi = \psi_1$ ,  $\psi = \psi_2$  之间那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

**解** 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (b+a\cos\psi)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = a^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0$$

故  $\sqrt{EG-F^2} = a(b+a\cos\psi)$ . 于是, 所求的面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} a(b+a\cos\psi) d\psi = a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)].$$

整个环的表面积为

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} a(b+a\cos\psi) d\psi = 4\pi^2 ab.$$

**【4050】** 求矩形  $x=a>0, 0\leq y\leq b, 0\leq z\leq c$  对坐标原点的立体角  $\omega$ . 若  $a$  很大, 推出  $\omega$  的近似公式.

**解** 以原点为球心作单位球, 则  $\omega$  即为该球面含于四面体  $O-ABCD$  内的面积, 其中  $ABCD$  是以  $b, c$  为边长的矩形 (图 8.49),

取球坐标系, 由 4047 题知:  $\sqrt{EG-F^2} = \cos\psi$ ,

又  $\varphi$  和  $\psi$  的变化域为

$$0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad 0 \leq \psi \leq \arcsin \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}.$$

于是, 立体角

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} d\varphi \int_0^{\arcsin \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}} \cos\psi d\psi = \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}} d\varphi \\ &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \sin\varphi\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \sin\varphi\right)^2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \sin\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}. \end{aligned}$$

当  $a$  很大时, 有

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}} = \frac{bc}{a^2 \sqrt{\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}} \approx \frac{bc}{a^2},$$

于是, 得  $\omega$  的近似公式  $\omega \approx \frac{bc}{a^2}$ .

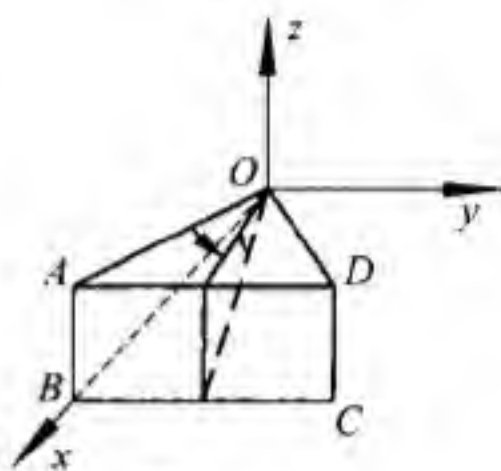


图 8.49

## § 5. 二重积分在力学上的应用

1° 质心 若薄板  $\Omega$  位于平面  $Oxy$  内,  $x_0, y_0$  为其质心坐标,  $\rho=\rho(x, y)$  为其面密度, 则

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y dx dy, \quad (1)$$

其中  $M = \iint_{\Omega} \rho dx dy$  为薄板的质量.

若薄板是均质的, 则在公式(1)中应令  $\rho=1$ .

2° 转动惯量  $I_x$  和  $I_y$  分别为平面  $Oxy$  内薄板  $\Omega$  对坐标轴  $Ox$  和  $Oy$  的转动惯量, 可表示为以下公式:

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 dx dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 dx dy, \quad (2)$$

其中  $\rho=\rho(x, y)$  为薄板的面密度.

还可研究惯性积

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} \rho xy dx dy.$$

在公式(2)中取  $\rho=1$ , 我们就得到平面图形的几何转动惯量.

**【4051】** 求边长为  $a$  的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点之一的距离成正比, 且在正方形的中心等于  $\rho_0$ .

解 取坐标系如图 8.50 所示, 则面密度  $\rho = k\sqrt{x^2+y^2}$ . 由于

$$\rho_0 = k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故  $k = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$ . 从而,  $\rho = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ .

若引用极坐标, 即得质量

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2} dx dy = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} r^2 dr \right] \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3}\sqrt{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} \right] = \frac{\rho_0 a^2}{3} 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2\varphi} d(\tan\varphi) \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2\sqrt{2} \left[ \frac{\tan\varphi}{2} \sqrt{1+\tan^2\varphi} + \frac{1}{2} \ln |\tan\varphi + \sqrt{1+\tan^2\varphi}| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\rho_0 a^2}{3} [2 + \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2})]. \end{aligned}$$

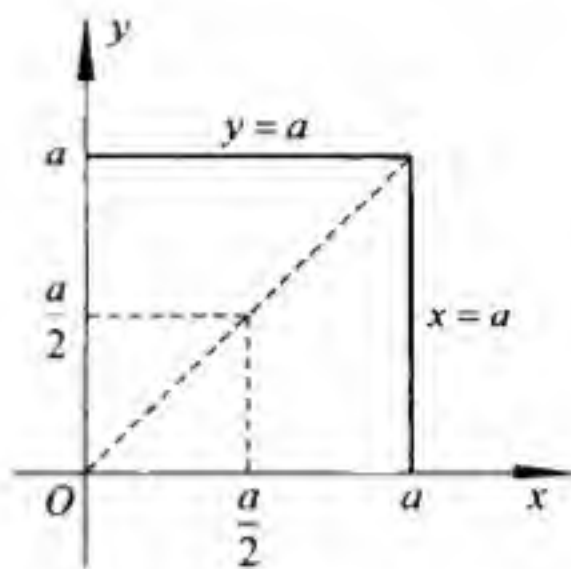


图 8.50

求以下列曲线为界的均匀薄板的质心坐标:

**【4052】**  $ay = x^2$ ,  $x+y=2a$  ( $a>0$ ).

解 面密度  $\rho$  为常数. 积分域如图 8.51 所示. 质量

$$M = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{9}{2} \rho a^2.$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y = \rho \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = -\frac{9}{4} \rho a^3,$$

$$M_x = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{36}{5} \rho a^3.$$

于是, 质心  $(x_0, y_0)$  为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5}a.$$

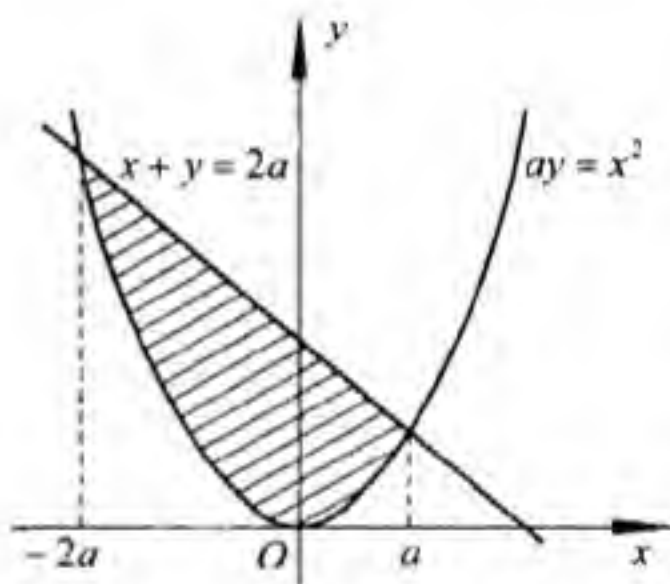


图 8.51

**【4053】**  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ .

解 质量和对  $Oy$  轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{6} \rho a^2, \quad M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{30} \rho a^3.$$

于是, 质心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{5}.$$

由关于直线  $y=x$  的对称性知,  $x_0 = y_0 = \frac{a}{5}$ .

**【4054】**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ( $x>0, y>0$ ).

解 质量和对  $Oy$  轴的一次矩分别为

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_0^a dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= 3a^2 \rho \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2 \rho}{32}, \end{aligned}$$

$$M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a x (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = 3a^3 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^5 t dt = \frac{8a^3 \rho}{105}.$$



于是,质心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线  $y=x$  的对称性知,  $x_0 = y_0 = \frac{256a}{315\pi}$ .

\* ) 作代换  $x = a \cos^3 t$ .

**【4055】**  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$  (线圈).

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线,围成一图形  $\Omega$ . 作变量代换

$$x = \frac{a^2 b}{c^2} r \cos^4 \theta \sin^2 \theta, \quad y = \frac{ab^2}{c^2} r \cos^2 \theta \sin^4 \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

则原曲线方程变为  $r=1$ . 又容易算得

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{2a^3 b^3}{c^4} r (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta),$$

故(利用 3856 题的结果)

$$M = \iint_{\Omega} \rho dx dy = \frac{2a^3 b^3}{c^4} \rho \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta) d\theta = \frac{a^3 b^3}{c^4} \rho \left[ \frac{1}{2} B(3, 4) + \frac{1}{2} B(4, 3) \right] = \frac{a^3 b^3}{c^4} \rho B(3, 4),$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_{\Omega} \rho x dx dy = \frac{2a^5 b^4}{c^6} \rho \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^2 \theta (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^5 b^4}{c^6} \rho \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos^{11} \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 \theta \cos^9 \theta d\theta \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^5 b^4}{c^6} \rho [B(4, 6) + B(5, 5)]. \end{aligned}$$

于是,

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2 b}{3c^2} \frac{B(4, 6) + B(5, 5)}{B(3, 4)},$$

由于  $B(4, 6) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)} = \frac{3! \cdot 5!}{9!}$ ,  $B(5, 5) = \frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)} = \frac{(4!)^2}{9!}$ ,  $B(3, 4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2! \cdot 3!}{6!}$ ,

代入,化简得

$$x_0 = \frac{a^2 b}{3c^2} \cdot \frac{6! [3! \cdot 5! + (4!)^2]}{2! \cdot 3! \cdot 9!} = \frac{a^2 b}{14c^2}.$$

同理,可求得质心的纵坐标为

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_{\Omega} \rho y dx dy}{\iint_{\Omega} \rho dx dy} = \frac{ab^2}{14c^2}.$$

**【4056】**  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$  ( $x > 0, y > 0$ ).

解 曲线的极坐标方程为  $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ , 质量和对  $Oy$  轴的一次矩分别为

$$M = \iint_{\Omega} \rho dx dy = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \frac{\rho a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\rho a^2}{2},$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_{\Omega} \rho x dx dy = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r \cdot r \cos \varphi dr = \frac{\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{5}{2}} \varphi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \rho a^3 \frac{\pi}{2\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} \pi \rho a^3. \end{aligned}$$

于是,质心的横坐标为  $x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\pi a}{8}$ . 由关于直线  $y=x$  的对称性知,  $x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}$ .

\* ) 利用 3856 题的结果.

**【4057】**  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $\varphi = 0$ .

解 质量和对  $Oy$  轴、 $Ox$  轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr = \frac{1}{2} \rho a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4} \pi \rho a^2,$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \cos\varphi dr = \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi = \frac{\rho a^3}{3} \left[ \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 d\varphi - \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 d\varphi \right] \\
 &= \frac{\rho a^3}{3} \left[ 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt - 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right] = \frac{\rho a^3}{3} \left[ 32 \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} - 16 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{5\pi\rho a^3}{8}.
 \end{aligned}$$

$$M_x = \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \sin\varphi dr = \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = -\frac{\rho a^3}{3} \cdot \frac{(1+\cos\varphi)^4}{4} \Big|_0^\pi = \frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是,质心的坐标为  $x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{5}{6}a$ ,  $y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{16}{9\pi}a$ .

**【4058】**  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ),  $y = 0$ .

解 质量和对  $Ox$  轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^{2\pi} dx \int_0^y dy = \rho \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi\rho a^2,$$

$$M_x = \rho \int_0^{2\pi} dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} y^2 dx = \frac{1}{2} \rho a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} \pi \rho a^3.$$

于是,质心的纵坐标为  $y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{5}{6}a$ .

由对称性知,  $x_0 = \pi a$ .

**【4059】** 求圆形薄板  $x^2 + y^2 \leq a^2$  的质心坐标. 设它在点  $M(x, y)$  的面密度与点  $M$  到点  $A(a, 0)$  的距离成正比.

解 按题设,面密度  $\rho = k \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$  ( $k$  为常数). 于是,质量为

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} k \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy \\
 &= k \int_{-a}^a \left[ y \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2 \ln(y + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}) \right] \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= k \int_{-a}^a \sqrt{2a(a-x)} \sqrt{a+x} dx - k \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{2} \ln(a-x) \right] (a-x)^2 dx + k \int_{-a}^a (a-x)^2 \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{2a}) dx \\
 &= I_1 - I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

由于

$$I_1 = k \int_{-a}^a \sqrt{2a} \left[ -(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2a(x+a)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \sqrt{2a}k \left[ -\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4a}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{-a}^a = \frac{32}{15}ka^3,$$

$$I_2 = \frac{k}{2} \int_0^{2a} t^2 \ln t dt = \frac{k}{6} t^3 \ln t \Big|_0^{2a} - \frac{k}{6} \int_0^{2a} t^3 \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{4}{3}ka^3 \ln 2a - \frac{4}{9}ka^3,$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= k \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2a}} t(2a-t^2)^2 \ln(t + \sqrt{2a}) dt = 8a^2k \int_0^{\sqrt{2a}} t \ln(t + \sqrt{2a}) dt - 8ka \int_0^{\sqrt{2a}} t^3 \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\
 &\quad + 2k \int_0^{\sqrt{2a}} t^5 \ln(t + \sqrt{2a}) dt = 8ka^2 \left( \frac{a}{2} + a \ln \sqrt{2a} \right) - 8ka \left( \frac{7}{12}a^2 + a^2 \ln \sqrt{2a} \right) \\
 &\quad + 2k \left( \frac{37}{45}a^3 + \frac{4}{3}a^3 \ln \sqrt{2a} \right) = \frac{44}{45}ka^3 + \frac{8}{3}ka^3 \ln \sqrt{2a} = \frac{44}{45}ka^3 + \frac{4}{3}ka^3 \ln 2a.
 \end{aligned}$$

因而最后得  $M = \frac{32}{15}ka^3 - \left( \frac{4}{3}ka^3 \ln 2a - \frac{4}{9}ka^3 \right) + \left( \frac{44}{45}ka^3 + \frac{4}{3}ka^3 \ln 2a \right) = \frac{32}{9}ka^3$ .

仿照上述方法可求得一次矩  $M_y = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} kx \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy = -\frac{32}{45}ka^4$ .

而由对称性得:  $M_x = 0$ . 于是,质心的坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{5}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = 0.$$

**【4060】** 求曲线  $y = \sqrt{2px}$ ,  $y = 0$ ,  $x = X$  所围图形的质心在参数  $X$  变化时所描绘的曲线.

解 变动面积的质量为  $M = \rho \int_0^X dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2\sqrt{2p}}{3} X^{\frac{3}{2}},$

而一次矩  $M_y = \rho \int_0^X x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2\sqrt{2p}}{5} X^{\frac{5}{2}}, \quad M_x = \rho \int_0^X dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \rho \frac{1}{2} p X^2.$

于是,变动面积的质心为  $x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5} X, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$

因此,质心的轨迹方程为  $y_0 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \sqrt{p \cdot \frac{5}{3} x_0} = \frac{1}{8} \sqrt{30px_0},$

此即所求的曲线方程,其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所围的面积( $\rho=1$ )对坐标轴  $Ox$  和  $Oy$  的转动惯量  $I_x$  和  $I_y$ :

【4061】  $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y=0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0).$

解 若设  $b_2 > b_1$ , 则

$$I_x = \int_0^h y^2 dy \int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2} dx = (b_2 - b_1) \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{(b_2 - b_1)h^3}{12},$$

$$I_y = \int_0^h dy \int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2} x^2 dx = \frac{b_2^3 - b_1^3}{3} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 dy = \frac{h(b_2^3 - b_1^3)}{12};$$

若设  $b_1 > b_2$ , 则  $I_x = \frac{(b_1 - b_2)h^3}{12}, \quad I_y = \frac{h(b_1^3 - b_2^3)}{12}.$

【4062】  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, x=0, y=0 \quad (0 \leq x \leq a).$

解  $I_x = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} y^2 dy$   
 $= \frac{1}{3} \int_0^a [a^3 - 3a^2 \sqrt{2ax-x^2} + 3a(2ax-x^2) - (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx$   
 $= \frac{1}{3} \left[ a^3 x - 3a^2 \left( \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{2} \right) + 3a^2 x^2 - ax^3 \right] \Big|_0^a - \frac{1}{3} \int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$   
 $= a^4 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4 \cos^4 t dt = a^4 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4 t dt$   
 $= a^4 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{a^4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi).$

利用图形的对称性,即得  $I_x = I_y = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi).$

\* ) 作代换  $x-a = a \sin t$ .

【4063】  $r = a(1 + \cos \varphi).$

解 曲线所围的平面域可表示为  $-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi).$

于是,

$$I_x = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} a^4 (1 + \cos \varphi)^4 \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} a^4 \int_0^{\pi} (1 + 4\cos \varphi + 6\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi a^4 \cdot \frac{21}{16} = \frac{21}{32} \pi a^4.$$

$$I_y = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \frac{1}{2} a^4 \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^4 \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} a^4 \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi + 6\cos^4 \varphi + 4\cos^5 \varphi + \cos^6 \varphi) d\varphi = \frac{49}{32} \pi a^4.$$

\* ) 对于任意正整数  $n$ , 有  $\int_0^{\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi, & n \text{ 为偶数;} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$



为算出  $I_x, I_y$  的值,也可变换被积函数的形式,直接用换元法计算,这样较简单.事实上,我们有

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 \sin^2\varphi d\varphi = 2^6 a^4 \int_0^\pi \cos^{10} \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2^6 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x (1-\cos^2 x) dx = 2^6 a^4 \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \left(1 - \frac{11}{12}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{21}{32} \pi a^4. \\ I_y &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 \cos^2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 d\varphi - \frac{21}{32} \pi a^4 \\ &= 2^4 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx - \frac{21}{32} \pi a^4 = \frac{70}{32} \pi a^4 - \frac{21}{32} \pi a^4 = \frac{49}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

【4064】  $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ .

解 曲线的图像关于两坐标轴和直线  $y=x$  是对称的,参看 1542 题的图像. 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

根据对称性,只要算出从  $\varphi=0$  到  $\varphi=\frac{\pi}{4}$  那部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果,并且显然有  $I_x = I_y$ .

于是,我们有

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= 4 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}} r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(1 - 2\sin^2\varphi \cos^2\varphi)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)^2} = 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{(3 + \cos 4\varphi)^2} = \frac{4a^4}{9} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{3}\cos x\right)^2} \quad * \\ &= \frac{4a^4}{9} \left[ -\frac{\frac{1}{3}\sin x}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\cos x\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}} \tan \frac{x}{2}\right) \right] \Big|_0^{\pi} \quad ** \\ &= \frac{4a^4}{9} \cdot 2 \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

\* ) 作代换  $x=4\varphi$ .

\*\* ) 利用 2063 题的结果.

【4065】  $xy=a^2, xy=2a^2, x=2y, 2x=y (x>0, y>0)$ .

解 作代换  $xy=u, \frac{y}{x}=v$ , 则  $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$ , 且雅可比行列式的绝对值  $|J|=\frac{1}{2v}$ , 曲线所围的面积即积分域变为

$$a^2 \leq u \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 2.$$

$$\text{于是, } I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{uv}{2v} du = \frac{9a^4}{8}, \quad I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2v^2} du = \frac{9a^4}{8}.$$

【4066】 求曲线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  所围区域  $S$  的极转动惯量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy.$$

解 引用极坐标,则图形  $S$  的界线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

这是双纽线. 利用对称性,得  $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 2\varphi}} r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{8}.$

【4067】 证明公式:

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

其中  $I_l, I_{l_0}$  是图形  $S$  对于二平行轴  $l$  和  $l_0$  的转动惯量,其中  $l_0$  是通过图形的质心,而  $d$  为两轴间的距离.

**证明思路** 取  $l_0$  轴为  $Ox$  轴, 图形  $S$  的质心为坐标原点, 则  $I_l = \iint_S (y-d)^2 dx dy$ , 由题设即易获证.

**证** 取  $l_0$  轴为  $Ox$  轴, 图形的质心为坐标原点, 则

$$I_l = \iint_S (y-d)^2 dx dy = \iint_S y^2 dx dy - 2d \iint_S y dx dy + d^2 \iint_S dx dy.$$

因为  $l_0$  通过图形  $S$  的质心, 故  $y_0 = \frac{1}{S} \iint_S y dx dy = 0$ , 即  $\iint_S y dx dy = 0$ .

又  $\iint_S y^2 dx dy = I_{l_0}$ ,  $\iint_S dx dy = S$ .

于是,  $I_l = I_{l_0} + Sd^2$ .

**【4068】** 证明: 平面图形  $S$  对通过其质心  $O(0,0)$  并与  $Ox$  轴成  $\alpha$  角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

其中  $I_x$  和  $I_y$  为图形  $S$  对于  $Ox$  轴和  $Oy$  轴的转动惯量及  $I_{xy}$  为惯性积:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dx dy.$$

**证明思路** 取直角坐标系  $Ox'y'$ , 使  $Ox'$  轴与  $Ox$  轴的夹角为  $\alpha$ , 则有

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad \text{且} \quad |I| = \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = 1.$$

于是, 所求的转动惯量为  $I = \iint_S y'^2 \rho dx' dy'$ , 由题设即易获证.

**证** 今取直角坐标系  $Ox'y'$ , 使  $Ox'$  轴与  $Ox$  轴的夹角为  $\alpha$ , 则有

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

这就是旋转变换, 雅可比行列式的绝对值  $|I| = \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = 1$ .

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S y'^2 \rho dx' dy' = \iint_S (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 \rho dx dy \\ &= \cos^2 \alpha \iint_S \rho y^2 dx dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_S \rho xy dx dy + \sin^2 \alpha \iint_S \rho x^2 dx dy \\ &= I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

**【4069】** 求以  $a$  为边的正三角形对通过三角形质心并与它的高成  $\alpha$  角的直线的转动惯量.

**解** 利用 4068 题的结果, 取质心为坐标原点. 不妨取  $Ox$  轴平行于三角形的一条边, 则过质心与高成  $\alpha$  角的直线, 即为过坐标原点与  $Ox$  轴成  $\alpha$  角的直线. 于是, 所求的转动惯量为

$$I_\alpha = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程分别为

$$y = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad y = -\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以, 根据对称性知:

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}} y^2 dy = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{3} \left[ \left( -\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^3 - \left( -\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^3 \right] dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left( -\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}a^2x + \frac{\sqrt{3}}{24}a^3 \right) dx = 2\sqrt{3}a^4 \left( \frac{1}{48} - \frac{1}{64} \right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}; \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \iint_S xy dx dy = 0;$$

$$I_y = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}} x^2 dy = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \left[ \left( -\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right] dx$$



$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\sqrt{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}a}{2}x^2 \right) dx = \sqrt{3}a^4 \left( \frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

于是,

$$I_z = \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \sin^2 \alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

**【4070】** 设圆柱形容器  $x^2 + y^2 = a^2, z=0$  内盛有水, 水平面为  $z=h$ , 求水对容器侧壁  $x \geq 0$  的压力.

**解** 用  $X$  和  $Y$  分别表示压力在  $Ox$  与  $Oy$  轴上的投影. 由对称性, 显然有  $Y=0$ . 下面求  $X$ . 由于  $dS = a d\theta dz$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ), 而在面元  $dS$  上的压力在  $Ox$  轴上的投影  $dX$  为  $(zdS) \cos \theta$ . 于是,

$$X = \iint_S z \cos \theta dS = \iint_S a z \cos \theta d\theta dz = a \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) \left( \int_0^h z dz \right) = ah^2.$$

**【4071】** 半径为  $a$  的球体沉入密度为  $\delta$  的液体中深度为  $h$  (由球心算起) 的地方, 这里  $h \geq a$ . 求液体对球的上表面和下表面的压力.

**解** 设球面方程为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 则在球面上的点  $(x, y, z)$  处沉入液体的深度  $d$  为

$$d = h - z \quad (-a \leq z \leq h).$$

于是, 上半球面  $S_1$  的点和下半球面  $S_2$  的点的深度分别为

$$d = h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, \quad d = h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

根据对称性知, 压力在  $Ox$  轴上和  $Oy$  轴的投影均为零, 故只要计算压力在  $Oz$  轴上的投影. 液体作用于球的上表面和下表面的压力分别记以  $p_1$  和  $p_2$ , 并设  $\gamma$  为球上各点处压力的方向 (即内法线方向) 与  $Oz$  轴正向的夹角, 则

$$\begin{aligned} p_1 &= \iint_{S_1} d\delta \cos \gamma dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy = -h\pi a^2 \delta + \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= -h\pi a^2 \delta + \left[ -\frac{2\pi\delta}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3} \right] \Big|_0^a = -\pi a^2 \delta \left( h - \frac{2a}{3} \right) \quad (p_1 < 0 \text{ 表示压力向下}). \end{aligned}$$

同理, 我们有

$$p_2 = \iint_{S_2} d\delta \cos \gamma dS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy = \pi a^2 \delta \left( h + \frac{2a}{3} \right) \quad (p_2 > 0 \text{ 表示压力向上}).$$

**【4072】** 底半径为  $a$  高为  $b$  的直圆柱体完全沉入密度为  $\delta$  的液体中, 其中心在液面下的深度为  $h$ , 而圆柱的轴与竖直方向成  $\alpha$  角, 求液体对圆柱上底和下底的压力.

**解** 取圆柱的中心为坐标原点, 取  $Oxy$  平面是水平的, 再取圆柱的轴 (朝上的方向) 在  $Oxy$  平面上的投影所在的方向为  $Ox$  轴, 取  $Oz$  轴垂直向上, 最后取  $Oy$  轴使  $Ox$  轴、 $Oy$  轴和  $Oz$  轴构成右手系.

于是, 液面方程为  $z=h$ . 设圆柱上底为  $S_1$ , 下底为  $S_2$ , 则  $S_1$  所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = \frac{b}{2}, \quad (1)$$

$S_2$  所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = -\frac{b}{2}. \quad (2)$$

在点  $(x, y, z)$  处 ( $z \leq h$ ) 液体的深度为  $h - z$ . 用  $X_1, Y_1$  和  $Z_1$  分别表示液体在圆柱上底  $S_1$  上的压力在  $Ox$  轴、 $Oy$  轴和  $Oz$  轴上的投影. 同样, 用  $X_2, Y_2$  和  $Z_2$  分别表示在  $S_2$  上的压力在  $Ox$  轴、 $Oy$  轴和  $Oz$  轴上的投影. 显然,  $Y_1 = Y_2 = 0$ . 我们有

$$X_1 = - \iint_{S_1} \delta (h - z) \sin \alpha dS = -\delta \sin \alpha \iint_{S_1} (h - z) dS, \quad (3)$$

$$Z_1 = - \iint_{S_1} \delta (h - z) \cos \alpha dS = -\delta \cos \alpha \iint_{S_1} (h - z) dS. \quad (4)$$

由(1)式知, 在  $S_1$  上有  $z = \frac{1}{\cos \alpha} \left( \frac{b}{2} - x \sin \alpha \right)$ . 于是, 注意到  $S_1$  的面积为  $\pi a^2$ , 可知



$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (h-z) dS &= \iint_{S_1} \left[ h - \frac{1}{\cos \alpha} \left( \frac{b}{2} - x \sin \alpha \right) \right] dS = \left( h - \frac{b}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \right) \iint_{S_1} dS + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS \\ &= \left( h - \frac{b}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS.\end{aligned}$$

由于  $\frac{1}{\pi a^2} \iint_{S_1} x dS$  是  $S_1$  的质心的  $x$  坐标, 也即  $\frac{b}{2} \sin \alpha$ , 故  $\iint_{S_1} x dS = \frac{1}{2} \pi a^2 b \sin \alpha$ . 代入即得

$$\iint_{S_1} (h-z) dS = \left( h - \frac{b}{2 \cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 b \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \left( h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2.$$

以此代入(3)式与(4)式, 得  $X_1 = -\pi a^2 \delta \left( h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha$ ,  $Z_1 = -\pi a^2 \delta \left( h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha$ .

同理, 我们有  $X_2 = \iint_{S_2} \delta(h-z) \sin \alpha dS = \delta \sin \alpha \iint_{S_2} (h-z) dS$ ,  $Z_2 = \iint_{S_2} \delta(h-z) \cos \alpha dS = \delta \cos \alpha \iint_{S_2} (h-z) dS$ .

再注意到(2)式, 类似地可计算得

$$\iint_{S_2} (h-z) dS = \iint_{S_2} \left[ h + \frac{1}{\cos \alpha} \left( \frac{b}{2} + x \sin \alpha \right) \right] dS = \left( h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2.$$

于是,  $X_2 = \pi a^2 \delta \left( h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha$ ,  $Z_2 = \pi a^2 \delta \left( h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha$ .

**【4073】** 求均匀的圆柱体  $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$  对质点  $P(0, 0, b)$  的引力, 设圆柱的质量等于  $M$ , 而质点的质量等于  $m$ .

**解** 根据对称性知, 引力在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的投影等于零, 故只要计算引力在  $Oz$  轴上的投影  $F_z$ . 今取圆环, 其体积为

$$dV = 2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM = \frac{2\pi r M dr dz}{\pi a^2 h} = \frac{2Mr}{a^2 h} dr dz,$$

吸引质点  $P$  的引力

$$dF_z = -\frac{2krmM(b-z)}{a^2 h \sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz.$$

于是, 所求的引力为

$$\begin{aligned}F_z &= -\frac{2kmM}{a^2 h} \int_0^h \int_0^a \frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz = -\frac{2kmM}{a^2 h} \left[ \int_0^h \operatorname{sgn}(b-z) dz - \int_0^h \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} dz \right] \\ &= -\frac{2kmM}{a^2 h} [ |b| - |b-h| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2} ],\end{aligned}$$

其中  $k$  为引力常数.

**【4074】** 物体对挤压面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

的压强分布由公式

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

给出, 求物体对此面的平均压强.

**解** 物体在椭圆面上的平均压强为

$$p_{\text{av}} = \frac{1}{\pi ab} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} p_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{4}{\pi ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p_0 (1-r^2) ab r dr = \frac{4}{\pi ab} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0 ab}{4} = \frac{p_0}{2}.$$

**【4075】** 以  $a$  和  $b$  为边的矩形草地上均匀地覆盖有已收割的干草, 其面密度为  $p$ . 若运送质量为  $M$  的货物到距离为  $r$  的地方所需的功为  $kMr$  ( $0 < k < 1$ ), 则为了把所有的干草集中在草地的中心, 至少应消耗多少功?

**解** 不妨将坐标原点取在矩形的中心,  $Ox$  轴平行于  $a$  边,  $Oy$  轴平行于  $b$  边. 由于将面积  $dx dy$  上的干草移到中心要消耗的功为  $dW = kp \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 并利用对称性, 即知所要求的功为

$$\begin{aligned} W &= 4kp \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 4kp \left[ \int_0^{\arctan \frac{b}{a}} \int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}} r^2 dr d\varphi + \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}} r^2 dr d\varphi \right] \\ &= \frac{kp}{6} \left[ a^3 \int_0^{\arctan \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi + b^3 \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

但是,

$$\begin{aligned} \int_0^{\arctan \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi &= \left[ \frac{\sin \varphi}{2\cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \Big|_0^{\arctan \frac{b}{a}} = \frac{b \sqrt{a^2+b^2}}{2a^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a}, \\ \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi &= \left[ -\frac{\cos \varphi}{2\sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\varphi}{2} \right| \right] \Big|_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a \sqrt{a^2+b^2}}{2b^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b}. \end{aligned}$$

于是, 我们有 
$$W = \frac{kp}{12} \left( 2ab \sqrt{a^2+b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a} + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b} \right).$$

\* ) 利用 2000 题的结果.

\*\* ) 利用 1999 题的结果.

## § 6. 三重积分

1° 三重积分的直接算法 函数  $f(x, y, z)$  是连续的, 且有界区域  $V$  由下列不等式给出:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

其中  $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$  皆为连续函数, 则函数  $f(x, y, z)$  在区域  $V$  内的三重积分可按公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

来计算. 有时采用下面的公式也很方便:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

其中  $S(x)$  是用平面  $x = \text{常数}$  截区域  $V$  所得的截面.

2° 三重积分中的变量代换 若连续可微函数

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

给出  $Oxyz$  空间的有界可求积的三维闭区域  $V$  与  $O'uvw$  空间的区域  $V'$  之间的一一映射,

并且当  $(u, v, w) \in V'$  时,

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则成立公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |I| du dv dw.$$

在特殊情况下, 有: 1) 圆柱坐标系  $\varphi, r, h$ , 其中

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r.$$

2) 球坐标系  $\varphi, \psi, r$ , 其中

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

计算下列三重积分:

**【4076】**  $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$ , 其中  $V$  是曲面  $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$  所围的区域.

解 
$$\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \frac{1}{364}.$$

【4077】  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $V$  是曲面  $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$  所围的区域.

解 
$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ -\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right] \Big|_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)} \right] \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[ -\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \\ &= \left[ -\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

【4078】  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , 其中  $V$  是曲面  $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$  所围的区域.

解 
$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

【4079】  $\iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ , 其中  $V$  是曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所围的区域.

解题思路 设  $P_x, Q_y, R_z$  分别表示区域  $V$  与平面  $x=\text{常数}, y=\text{常数}, z=\text{常数}$  所截部分在  $Oyz, Ozx, Oxy$  平面上的投影, 则有

$$\text{原式} = \int_a^b \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{P_x} dy dz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{Q_y} dz dx + \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{R_z} dx dy.$$

解 设  $P_x, Q_y, R_z$  分别表示区域  $V$  与平面  $x=\text{常数}, y=\text{常数}, z=\text{常数}$  所截部分在  $Oyz, Oxz, Oxy$  平面上的投影, 则有

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz &= \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{P_x} dy dz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{Q_y} dz dx + \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{R_z} dx dy \\ &= \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx + \frac{\pi ac}{b^2} \int_{-b}^b y^2 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy + \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c z^2 \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = 3 \cdot \frac{4\pi abc}{15} = \frac{4\pi abc}{5}. \end{aligned}$$

\* )  $P_x$  在平面  $x=\text{常数}$  上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = 1,$$

故其面积为

$$\pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

$Q_y$  及  $R_z$  的面积类推.

【4080】  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$ , 其中  $V$  是曲面  $x^2+y^2=z^2, z=1$  所围的区域.

解题思路 注意曲面在  $Oxy$  平面上的投影  $Q$  为圆盘  $x^2+y^2 \leq 1$ , 则有

$$\text{原式} = \iint_Q dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} dz.$$

解 曲面在  $Oxy$  平面上的投影  $Q$  为圆盘  $x^2+y^2 \leq 1$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz &= \iint_Q dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^2) r dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$



在下列三重积分内,用不同方法配置积分的上下限:

**【4081】**  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$

解 有界区域  $V$  如图 8.52 所示.

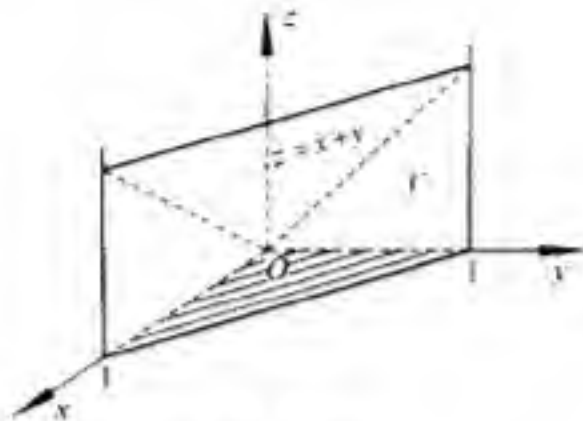


图 8.52

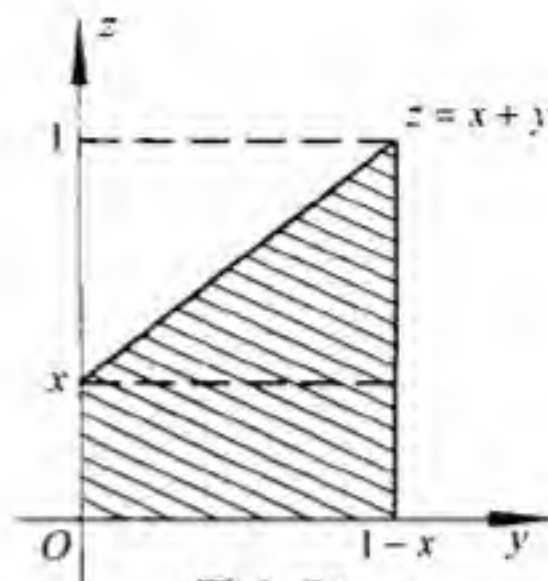


图 8.53

如果先对  $y$  积分,再对  $z, x$  积分,如图 8.53 所示,则积分域在  $Oyz$  平面上的投影域由诸直线  $z=0, z=x+y, y=0, y=1-x$  ( $x$  固定)

围成.于是,我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-z} f(x, y, z) dy + \int_x^1 dz \int_z^{1-z} f(x, y, z) dy \right\}. \end{aligned}$$

如果先对  $x$  积分,再对  $y, z$  积分,如图 8.54 所示,则有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{x-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\}. \end{aligned}$$

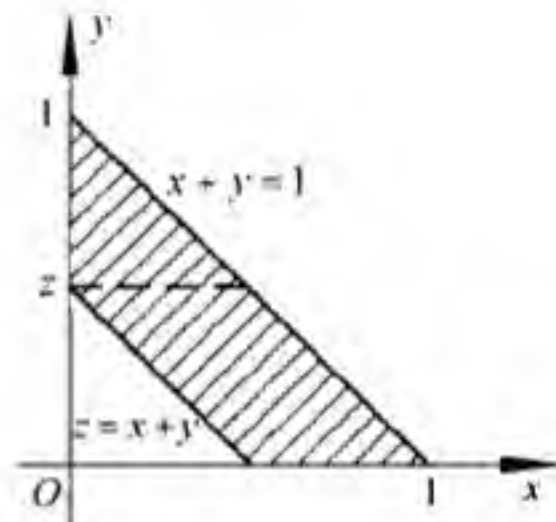


图 8.54

\* ) 这里用的公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

**【4082】**  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$

解 有界区域  $V$  如图 8.55 所示.

如果先对  $y$  积分,再对  $z, x$  积分,如图 8.56 所示,则积分域在  $Oyz$  平面上的投影域由不等式

$$|x| \leq z \leq 1, -\sqrt{z^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2-x^2},$$

( $x$  固定)给出.于是,我们有

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

如果先对  $x$  积分,再对  $y, z$  积分,如图 8.57 所示,则有

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx.$$

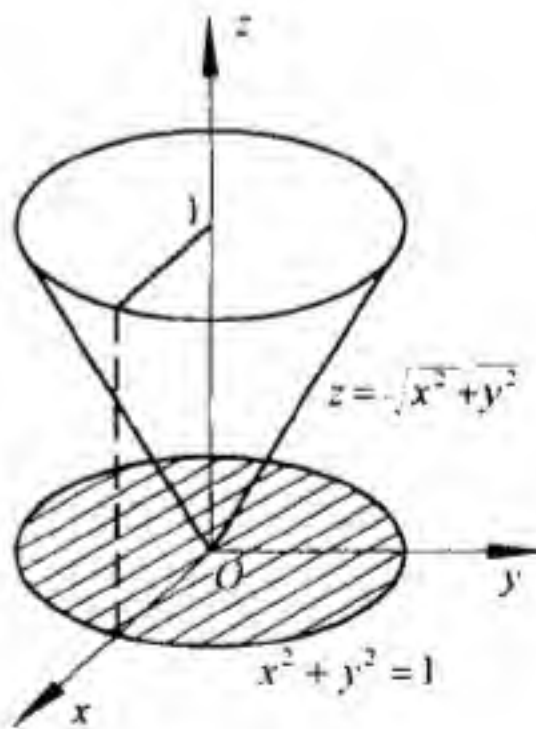


图 8.55

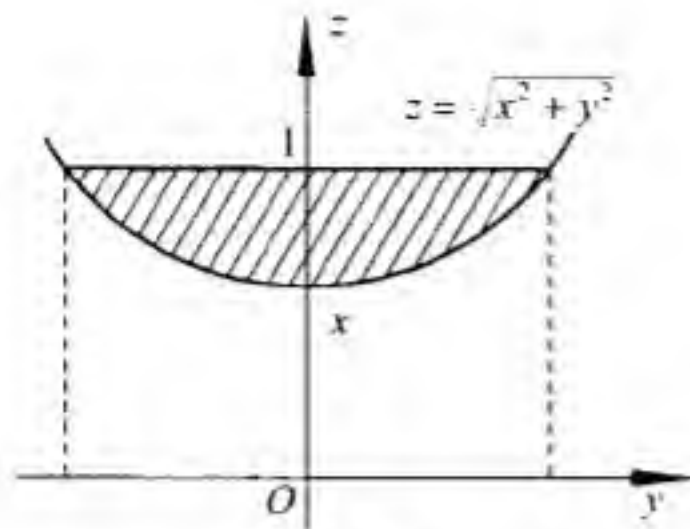


图 8.56

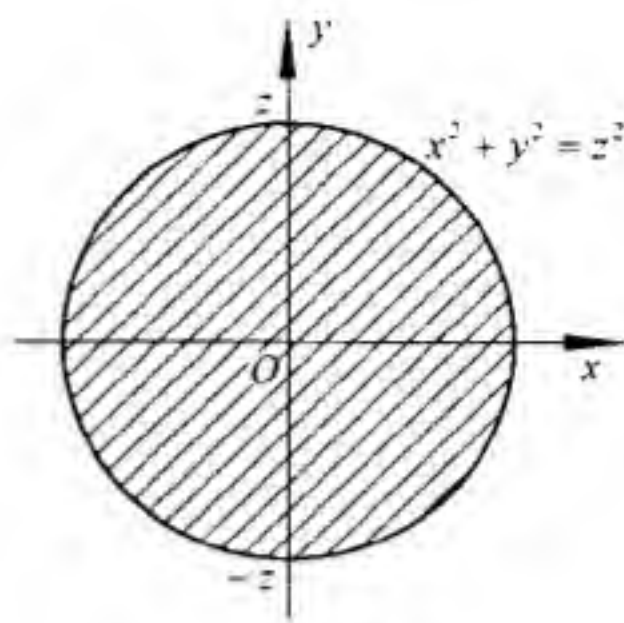


图 8.57

**【4083】**  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$

解 如果先对  $y$  积分, 再对  $z, x$  积分, 则积分域在  $Oxy$  平面上的投影域<sup>\*</sup>由方程

$$x=1, z=0, z=x^2 \quad \text{及} \quad x=0, x=1, z=x^2, z=x^2+1$$

所表示的曲线围成. 于是, 我们有

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dx \left[ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right].$$

如果先对  $x$  积分, 再对  $z, y$  积分, 不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对  $x$  积分, 再对  $y, z$  积分, 则积分域在  $Oyz$  平面上的投影域由方程

$$y=1, z=0, y=\sqrt{z} \quad \text{及} \quad y=0, y=1, y=\sqrt{z}, y=\sqrt{z-1}$$

所表示的曲线围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \left[ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right] + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

\* ) 这里采用的投影方式与前两题不同, 系用结果

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dz \int_{y_1}^{y_2} f(x, y, z) dy.$$

以一重积分代替三重积分:

**【4084】**  $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta$

解  $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\zeta \int_\zeta^\xi f(\zeta) d\eta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\zeta) (\xi - \zeta) d\zeta = \int_0^x d\zeta \int_\zeta^x f(\zeta) (\xi - \zeta) d\xi$   
 $= \frac{1}{2} \int_0^x f(\zeta) (x - \zeta)^2 d\zeta.$

**【4085】**  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$

解 化为先对  $y$  积分, 再对  $x, z$  积分, 可将原积分表示成如下两部分:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \left[ \int_z^1 dx \int_0^1 f(z) dy + \int_0^z dx \int_{x-z}^1 f(z) dy \right] = \int_0^1 dz \int_z^1 f(z) dx + \int_0^1 dz \int_0^z f(z) (1 - z + x) dx \\ &= \int_0^1 f(z) (1 - z) dz + \int_0^1 f(z) (1 - z) z dz + \frac{1}{2} \int_0^1 f(z) z^2 dz \\ &= \int_0^1 f(z) \left( 1 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z) (2 - z^2) dz; \\ & \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 dx \int_{x-z}^1 f(z) dy = \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 f(z) (1 - z + x) dx = \int_1^2 \left[ f(z) (1 - z) x + \frac{1}{2} f(z) x^2 \right] \Big|_{z-1}^1 dz \\ &= \int_1^2 f(z) \left[ 1 - z + (z - 1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (z - 1)^2 \right] dz = \frac{1}{2} \int_1^2 f(z) (z - 2)^2 dz. \end{aligned}$$

于是,  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-z} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)(2-z) dz + \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(2-z)^2 dz.$

【4086】 设  $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ , 且  $a, b, c, A, B, C$  为常数, 求

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz.$$

解  $\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz = \int_a^A dx \int_b^B [F''_{xy}(x, y, C) - F''_{xy}(x, y, c)] dy$   
 $= \int_a^A [F'_{xy}(x, B, C) - F'_{xy}(x, b, C) - F'_{xy}(x, B, c) + F'_{xy}(x, b, c)] dx$   
 $= F(A, B, C) - F(a, B, C) - F(A, b, C) + F(a, b, C) - F(A, B, c) + F(a, B, c) + F(A, b, c) - F(a, b, c).$

变换为球坐标, 计算积分:

【4087】  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , 其中  $V$  是曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  所围的区域.

提示 注意积分域  $V$  为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \psi$ , 且  $|I| = r^2 \cos \psi$ .

解 令  $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$ , 则曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  化为  $r = \sin \psi$ . 从而,

$$V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \psi, |I| = r^2 \cos \psi.$$

于是,

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sin \psi} r \cdot r^2 \cos \psi dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cos \psi d\psi = \frac{\pi}{10}.$$

【4088】  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$ .

提示 注意积分域  $V$  为  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{2}$ .

解 变换为球坐标, 积分域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{2}.$$

于是,

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos \psi \cdot r^2 \sin^2 \psi dr = \frac{1}{5} 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin^2 \psi d\psi$$

$$= \frac{\pi}{5} 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 \psi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1).$$

【4089】 在积分中变换为球坐标:

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中  $V$  是曲面  $z = x^2 + y^2, x = y, x = 1, y = 0, z = 0$  所围的区域.

解 引用球坐标, 由  $x = y, x = 1, y = 0$  知:  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

(图 8.58).

又从原点引半射线, 由曲面  $z = x^2 + y^2$  穿进, 平面  $x = 1$  穿出,

于是, 得  $r$  的下限为  $r = \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi}$ ,  $r$  的上限为  $r = \frac{1}{\cos \varphi \cos \psi}$ , 而  $\psi$  的变化域由  $z = 0$  到  $z = x^2 + y^2, x = 1$  所决定, 即

$$0 \leq \psi \leq \arctan \frac{1}{\cos \varphi}.$$

于是,

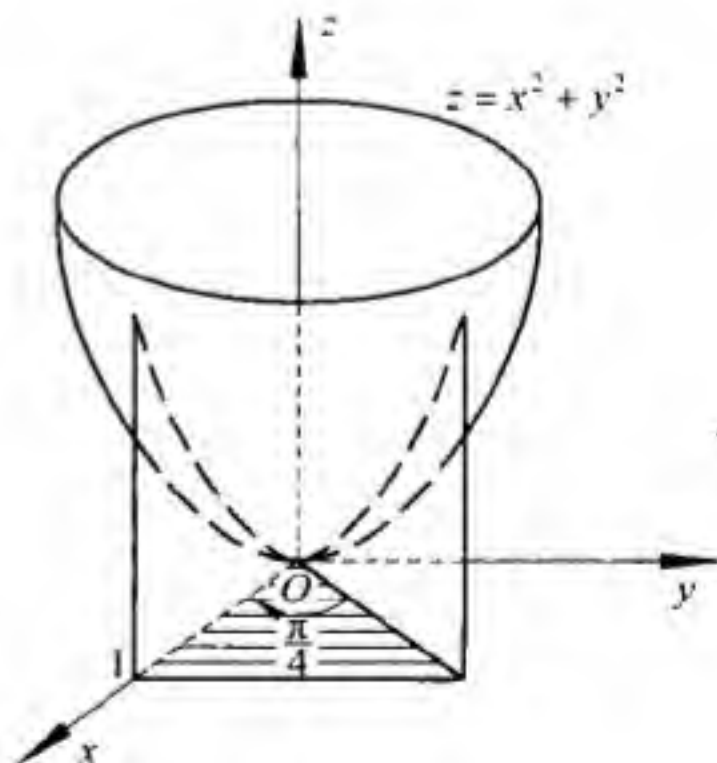


图 8.58



$$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\arctan \frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi d\psi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r) dr.$$

\* ) 因为  $x=1$  对应  $r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$ ,  $z=x^2+y^2$  对应  $r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$ , 故  $\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$ , 即  $\psi=\arctan \frac{1}{\cos\varphi}$ .

**【4090】** 进行适当的变量代换, 计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dx dy dz.$$

其中  $V$  为椭球  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ .

**解题思路** 作变量代换  $x=arcos\varphi\cos\psi$ ,  $y=brsin\varphi\cos\psi$ ,  $z=crsin\psi$ ,

则有  $|I|=abcr^2\cos\psi$ , 且对于  $V$  的  $\frac{1}{8}$  部分(第一卦限)有  $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ ,  $0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}$ ,  $0\leq r\leq 1$ .

**解** 作变量代换  $x=arcos\varphi\cos\psi$ ,  $y=brsin\varphi\cos\psi$ ,  $z=crsin\psi$ ,

则有  $|I|=abcr^2\cos\psi$ , 且对于  $V$  的  $\frac{1}{8}$  部分有

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}, \quad 0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}, \quad 0\leq r\leq 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dx dy dz &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abcr^2 \cos\psi \sqrt{1-r^2} dr = 4\pi \int_0^1 abcr^2 \sqrt{1-r^2} dr \\ &= 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{\pi abc}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) dt = \frac{\pi^2 abc}{4}. \end{aligned}$$

**【4091】** 变换为圆柱坐标, 计算积分  $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是曲面  $x^2+y^2=2z$ ,  $z=2$  所围的区域.

**提示** 注意积分域  $V$  为  $0\leq\varphi\leq 2\pi$ ,  $0\leq r\leq 2$ ,  $\frac{r^2}{2}\leq z\leq 2$ , 且  $|I|=r$ .

**解** 令  $x=r\cos\varphi$ ,  $y=r\sin\varphi$ ,  $z=z$ , 则  $x^2+y^2=2z$  化为  $r^2=2z$ . 积分域

$$V: 0\leq\varphi\leq 2\pi, \quad 0\leq r\leq 2, \quad \frac{r^2}{2}\leq z\leq 2, \quad |I|=r.$$

于是,

$$\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \frac{16\pi}{3}.$$

**【4092】** 计算积分

$$\iiint_V x^2 dx dy dz$$

其中  $V$  是曲面  $z=ay^2$ ,  $z=by^2$ ,  $y>0$  ( $0<a<b$ ),  $z=ax$ ,  $z=\beta x$  ( $0<a<\beta$ ),  $x=h$  ( $h>0$ ) 所围的区域.

**解题思路** 作变量代换  $\frac{z}{y^2}=u$ ,  $\frac{z}{x}=v$ ,  $z=w$ , 则有  $x=\frac{w}{v}$ ,  $y=\sqrt{\frac{w}{u}}$ ,  $z=w$  及  $|I|=\frac{w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}v^2}$ , 且区域  $V$

为  $a\leq u\leq b$ ,  $a\leq v\leq \beta$ ,  $0\leq w\leq h$ , 且  $|I|=\frac{w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}v^2}$ .

**解** 作变换  $\frac{z}{y^2}=u$ ,  $\frac{z}{x}=v$ ,  $z=w$ , 则  $x=\frac{w}{v}$ ,  $y=\sqrt{\frac{w}{u}}$ ,  $z=w$ . 从而, 积分域变为

$$V: a\leq u\leq b, \quad a\leq v\leq \beta, \quad 0\leq w\leq h.$$

且雅可比行列式

$$I = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{-\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}v^2}.$$

于是, 
$$\iiint_V x^2 dx dy dz = \int_0^h w^{\frac{7}{2}} dw \int_a^\beta \frac{1}{v^4} dv \int_u^b \frac{1}{2u\sqrt{u}} du = \frac{2}{27} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}.$$

【4093】 求积分

$$\iiint_V xyz dx dy dz,$$

其中  $V$  位于  $x > 0, y > 0, z > 0$  这一卦限内且由下列曲面围成:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, z = \frac{x^2 + y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = ax, y = \beta x \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta, 0 < m < n).$$

**解题思路** 作变量代换  $\frac{z}{x^2 + y^2} = u, xy = v, \frac{y}{x} = w$ , 则有  $x = \sqrt{\frac{v}{w}}, y = \sqrt{vw}, z = uv(w + \frac{1}{w})$  及  $|I| = \frac{v}{2w} (w + \frac{1}{w})$ , 且区域  $V$  变为  $\frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta$ .

**解** 作变换  $\frac{z}{x^2 + y^2} = u, xy = v, \frac{y}{x} = w$ , 则  $x = \sqrt{\frac{v}{w}}, y = \sqrt{vw}, z = uv(w + \frac{1}{w})$ , 且

$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ v(w + \frac{1}{w}) & u(w + \frac{1}{w}) & uv(1 - \frac{1}{w^2}) \end{vmatrix} = \frac{v}{2w} (w + \frac{1}{w}),$$

$$V: \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{u}{2} du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \left( w + \frac{1}{w} + \frac{2}{w} \right) dw \\ &= \frac{1}{32} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^8 - a^8) \left[ (\beta^2 - \alpha^2) \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

【4094】 求函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$  内的平均值.

**解** 区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$  即

$$\left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( z - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{4},$$

其体积  $V = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$ . 作变换:  $x = r \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, y = r \sin \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2} + r \sin \psi$ ,

则有  $f_{\text{平均}} = \frac{1}{V} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos \psi \left( \frac{3}{4} + r^2 + r \sin \psi + r \cos \varphi \cos \psi + r \sin \varphi \cos \psi \right) dr \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos \psi \left( \frac{3}{4} + r^2 \right) dr = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{20} \cos \psi d\psi = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{3\sqrt{3}}{20} d\varphi \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \pi = \frac{2}{\sqrt{3} \pi} \cdot \frac{3\sqrt{3} \pi}{5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

【4095】 求函数  $f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$  在区域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  内的平均值.

**解** 由于区域  $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  为椭球, 其体积等于  $\frac{4}{3} \pi abc$ , 故平均值为

$$f_{\text{平均}} = \frac{3}{4\pi abc} \iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dx dy dz.$$

若作变换  $x = a r \cos \varphi \cos \psi, y = b r \sin \varphi \cos \psi, z = c r \sin \psi$ , 并利用对称性, 则有

$$f_{xyz} = \frac{3}{4\pi abc} \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abce^r r^2 \cos\psi dr = 3 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left( \int_0^1 r^2 e^r dr \right) = 3(e-2).$$

【4096】 利用中值定理,估计积分

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

其中  $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$ .

解 由积分中值定理,有

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3, \quad (1)$$

其中  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ . 由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

代表点  $(x, y, z)$  与点  $(a, b, c)$  之间的距离,显然在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  中此距离的最小值是  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R$ , 最大值是  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R$ , 并且只在一个点达到最小值,也只有一个点达到最大值. 因此,函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  中的最大值是  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}$ , 最小值是  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R}$ , 并且只在一个点达到最大值,也只有一个点达到最小值. 我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值,也不可能是函数的最小值. 事实上,例如,若是最大值,即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R},$$

则由(1)式知

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad (2)$$

其中

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

显然,在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  上  $f(x, y, z) \geq 0$  且  $f(x, y, z)$  为连续函数. 于是,由(2)式知在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  上必有  $f(x, y, z) \equiv 0$ , 这显然是不可能的. 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R} < \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} < \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R},$$

即

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R < \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2} < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R,$$

故

$$\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R,$$

其中  $|\theta| < 1$ . 于是,由(1)式得

$$u = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R}.$$

【4097】 证明:若函数  $f(x, y, z)$  在区域  $V$  内是连续的,且对于任何区域  $\omega \subset V$  有

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

则当  $(x, y, z) \in V$  时,  $f(x, y, z) \equiv 0$ .

提示 用反证法及积分中值定理.

证 用反证法. 若当  $(x, y, z) \in V$  时,  $f(x, y, z) \not\equiv 0$ . 不失一般性,设对于  $V$  的某内点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 有  $f(x_0, y_0, z_0) > 0$ , 则由于  $f(x, y, z)$  的连续性,故存在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的某个闭邻域  $\omega' \subset V$ , 使当  $(x, y, z) \in \omega'$  时,  $f(x, y, z) > 0$ . 这样一来,利用中值定理,即有

$$\iiint_{\omega'} f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V_{\omega'} > 0,$$



其中  $(\xi, \eta, \zeta) \in \omega' \subset V$ . 这与假设  $\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$  矛盾. 因此, 当  $(x, y, z) \in V$  时,  $f(x, y, z) \equiv 0$ .

**【4098】** 求  $F'(t)$ , 设:

(1)  $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$ , 其中  $f$  为可微函数;

(2)  $F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz$ , 其中  $f$  为可微函数.

提示 (1) 作球坐标变换; (2) 作变量代换  $x=t\xi, y=t\eta, z=t\zeta$ .

解 (1) 作球坐标变换得

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

于是,  $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$ .

(2) 作变换  $x=t\xi, y=t\eta, z=t\zeta$  得

$$F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz = \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f(t^3 \xi \eta \zeta) t^3 d\xi d\eta d\zeta,$$

于是,

$$F'(t) = 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} t^2 f(t^3 \xi \eta \zeta) d\xi d\eta d\zeta + 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f'(t^3 \xi \eta \zeta) t^3 \xi \eta \zeta d\xi d\eta d\zeta = \frac{3}{t} \left[ F(t) + \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f'(xyz) xyz dx dy dz \right].$$

**【4099】** 求  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz$ , 其中  $m, n, p$  为非负整数.

解 分两种情况:

(1) 设  $m, n, p$  中至少有一个是奇数. 例如, 设  $p$  为奇数. 于是,

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz + \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z < 0}} x^m y^n z^p dx dy dz = I_1 + I_2.$$

今在积分  $I_2$  中作变量代换  $x=u, y=v, z=-w$ , 则  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = -1$ , 从而, 注意到  $p$  为奇数, 可知

$$I_2 = - \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ w \geq 0}} u^m v^n w^p du dv dw = -I_1,$$

于是,  $I = I_1 - I_1 = 0$ .

(2) 设  $m, n, p$  均为偶数. 此时被积函数  $x^m y^n z^p$  关于三个坐标平面皆对称. 于是,

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz = 8 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz.$$

引用球坐标,  $x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi$ , 得

$$\begin{aligned} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ r \geq 0, \varphi \geq 0, \psi \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+n+1} \psi \sin^p \psi d\psi \int_0^1 r^{m+n+p+2} dr \\ &= \frac{1}{m+n+p+3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+2}{2})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+n+2}{2}) \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+p+3}{2})} \\ &= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2}) \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+p+3}{2})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \cdot \frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \pi \sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+1}{2}}} \cdot \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{\pi}{2(m+n+p+3)} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故  $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz = \frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$

\* ) 利用 3856 题的结果.

**【4100】** 令  $x+y+z=\xi$ ,  $y+z=\xi\eta$ ,  $z=\xi\eta\zeta$ , 计算狄利克雷积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz \quad (p>0, q>0, r>0, s>0),$$

其中  $V$  是平面  $x+y+z=1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  所围的区域.

解 由假设知  $x=\xi(1-\eta)$ ,  $y=\xi\eta(1-\zeta)$ ,  $z=\xi\eta\zeta$ .

在此变换下可求得  $|I|=\xi^s \eta$ , 并且积分域  $V$  变为:

$$0<\xi<1, 0<\eta<1, 0<\zeta<1.$$

于是.

$$\begin{aligned} \iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz &= \int_0^1 \xi^{p+q+r+s+2} (1-\xi)^s d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1} (1-\eta)^p d\eta \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^s d\zeta \\ &= B(p+q+r+3, s+1) B(q+r+2, p+1) B(r+1, q+1) \\ &= \frac{\Gamma(p+q+r+3) \Gamma(s+1) \Gamma(q+r+2) \Gamma(p+1) \Gamma(r+1) \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4) \Gamma(p+q+r+3) \Gamma(q+r+2)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1) \Gamma(s+1) \Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \end{aligned}$$

## § 7. 利用三重积分计算体积

区域的体积  $V$  可表示为以下公式:  $V = \iiint_V dx dy dz.$

求以下列曲面为界的物体的体积:

**【4101】**  $z=x^2+y^2$ ,  $z=2x^2+2y^2$ ,  $y=x$ ,  $y=x^2$ .

解 区域  $V$  为  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x^2 \leq y \leq x$ ,  $x^2+y^2 \leq z \leq 2x^2+2y^2$ ,

故体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2) dy = \int_0^1 \left( \frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\ &= \left( \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

**【4102】**  $z=x+y$ ,  $z=xy$ ,  $x+y=1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ .

解 区域  $V$  为  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1-x$ ,  $xy \leq z \leq x+y$ .

故体积为  $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy) dy = \int_0^1 \left[ x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2} \right] dx = \frac{7}{24}.$

\* ) 因为  $0 \leq y \leq 1$ , 故有  $xy \leq z \leq x+y$ .

**【4103】**  $x^2+z^2=a^2$ ,  $x+y=\pm a$ ,  $x-y=\pm a$ .

解  $V = 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 8 \int_0^a (a-x) \sqrt{a^2-x^2} dx$

$$= 8a \left[ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_0^a + \frac{8}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3} (3\pi - 4).$$

**【4104】**  $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0),$

解 对区域  $V$  在  $Oxy$  平面上的投影作极坐标变换

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

则区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad \frac{r^2}{a} \leq z \leq r,$$

且有  $|I| = r$ . 于是, 体积为

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{r^2}{a}}^r dz = 2\pi \int_0^a \left( r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr = \frac{\pi a^3}{6}.$$

**【4105】**  $az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a > 0).$

解 由  $az = a^2 - x^2 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$  为界的物体体积为

$$V_1 = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \left( \int_0^{a-x-y} dz \right) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{a^2 - r^2}{a} r dr = \frac{\pi a^3}{8}.$$

由  $z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0$  为界的物体体积为

$$V_2 = \iiint_{\substack{x+y+z \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz = \frac{a^3}{6}.$$

于是, 所求的体积为  $V = V_1 - V_2 = \frac{a^3}{24} (3\pi - 4).$

**【4106】**  $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

提示 利用圆柱坐标, 则区域  $V$  为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 6 - r^2.$

解 引用圆柱坐标, 则区域  $V$  为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 6 - r^2.$

于是, 体积为  $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = \frac{32\pi}{3}.$

变换为球坐标或圆柱坐标, 计算以下曲面所围的体积:

**【4107】**  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2,$

解题思路 变换为圆柱坐标, 则有

$$r^2 + z^2 = 2az \quad \text{及} \quad r^2 \leq z^2,$$

且区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - r^2},$$

这里要注意, 球面方程应该是  $z = a \pm \sqrt{a^2 - r^2}$ , 但因体积  $V$  的一部分为球  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  的上半部, 故取  $z = a + \sqrt{a^2 - r^2}.$

解 变换为圆柱坐标, 则有  $r^2 + z^2 = 2az$  及  $r^2 \leq z^2.$

因而区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - r^2}.$$

于是, 体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz = 2\pi \int_0^a r(a + \sqrt{a^2 - r^2} - r) dr = 2\pi \left[ \frac{ar^2}{2} - \frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^a = \pi a^3.$$

\* ) 球面的方程应该是  $z = a \pm \sqrt{a^2 - r^2}$ , 但因体积  $V$  的一部分为球  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  的上半部, 故取  $z = a + \sqrt{a^2 - r^2}.$

**【4108】**  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

提示 变换为球坐标, 则区域  $V$  的  $\frac{1}{8}$  部分(第一卦限内)为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\psi}.$$



解 变换为球坐标,则区域  $V$  的  $\frac{1}{8}$  部分为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是,体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}} r^2 \cos\psi dr = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\psi (\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}} d\psi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}} d(\sin\psi) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

\* ) 作代换  $\sqrt{2}x = \sin t$ .

【4109】  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ .

解 立体在第一,第三,第六及第八卦限内,对于这些卦限分别有:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0; \quad x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$$

立体在这四个卦限内的各部分,一对一对地对称于坐标轴之一.这是因为左端及右端当  $x, y, z$  中的任何两个同时变号时等号不变.

变换为球坐标,计算得体积

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{4\cos^2\psi \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi}} r^2 \cos\psi dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi \sin\psi d\psi \\ &= 4 \left( \frac{\sin^2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \left( -\frac{1}{4} \cos^4\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【4110】  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0) (0 < a < b)$ .

提示 变换为球坐标,则区域  $V$  为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq b$ .

解 变换为球坐标,得区域  $V$  为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq b$ .

于是,体积为  $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^b r^2 \cos\psi dr = 2\pi \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left( \int_a^b r^2 dr \right) = \frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}$ .

在下列各题中最好利用广义球坐标  $r, \varphi, \psi (r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2})$ ,它们由以下公式引入:

$$x = a \cos\varphi \cos\psi, \quad y = b r \sin\varphi \cos\psi, \quad z = c r \sin\psi \quad (a, b, c, \alpha, \beta \text{ 为常数}),$$

并且

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{\beta-1}\psi \sin^{\beta-1}\psi.$$

求以下列曲面为界的物体的体积:

【4111】  $\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}$ .

解 令  $x = a \cos\varphi \cos\psi, y = b r \sin\varphi \cos\psi, z = c r \sin\psi$ , 则区域的  $\frac{1}{4}$  部分(第一卦限内)为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{a}{h} \cos\varphi \cos\psi}.$$

于是,体积为  $V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h} \cos\varphi \cos\psi}} a b c r^2 \cos\psi dr = \frac{4a^2 b c}{3h} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi d\psi \right) = \frac{\pi a^2 b c}{3h}$ .

【4112】  $\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ .

解 令  $x = a \cos\varphi \cos\psi, y = b r \sin\varphi \cos\psi, z = c r \sin\psi$ , 并利用对称性,即得体积

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\psi} abc r^2 \cos\psi dr = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{abc}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \psi d\psi = \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

**【4113】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$

解 令  $x = a \cos\varphi, y = b r \sin\varphi, z = z$ , 则  $r$  满足方程  $r^4 + r^2 - 1 = 0$ , 解得  $r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ . 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} ab r dr \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} dz = 2\pi abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr \\ &= 2\pi abc \left[ -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}. \end{aligned}$$

**【4114】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令  $x = a \cos\varphi, y = b r \sin\varphi, z = z$ , 则得体积

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr \int_{-(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{(1-r^2)^{\frac{1}{4}}} dz = 4\pi abc \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}} dr = 4\pi abc \left[ -\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}} \right] \Big|_0^1 = \frac{8}{5}\pi abc.$$

**【4115】**  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解题思路 作变量代换  $x = a \cos\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\psi, y = b r \sin\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\psi, z = c r \sin^{\frac{1}{2}}\psi$ .

则有  $|I| = \frac{1}{2} abcr^2 \sin^{-\frac{1}{2}}\psi$ , 且  $V$  的  $\frac{1}{8}$  部分(第一卦限内)为  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$ , 并利用 3856 题的结果及延拓公式.

解 令  $x = a \cos\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\psi, y = b r \sin\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\psi, z = c r \sin^{\frac{1}{2}}\psi$ , 则有  $|I| = \frac{1}{2} abcr^2 \sin^{-\frac{1}{2}}\psi$  且  $\frac{1}{8}$  区域  $V$  (第一卦限内)为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \frac{1}{2} abcr^2 \sin^{-\frac{1}{2}}\psi dr = \frac{2}{3} \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}}\psi d\psi = \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3} \pi abc \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3} \pi abc \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi} \\ &= \frac{1}{3} abc \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

\*\* ) 利用延拓公式:  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$ .

利用适当的变量代换, 计算以下列曲面为界的物体的体积(假定参数是正的):

**【4116】**  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} (x > 0, y > 0, z > 0).$

解题思路 作变量代换  $x = a \cos^2\varphi \cos^2\psi, y = b r \sin^2\varphi \cos^2\psi, z = c r \sin^2\psi$ .

则有  $|I| = 4abcr^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos^3\psi \sin\psi$ , 且区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \left(\frac{a}{h} \cos^2\varphi + \frac{b}{k} \sin^2\varphi\right) \cos^2\psi,$$

并利用 3856 题的结果.

解 令  $x = a \cos^2\varphi \cos^2\psi, y = b r \sin^2\varphi \cos^2\psi, z = c r \sin^2\psi$ , 则有  $|I| = 4abcr^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos^3\psi \sin\psi$ , 且区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \left( \frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right) \cos^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \psi} 4abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr \\ &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right)^3 d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi \\ &= \frac{2}{15} abc \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^4}{h^4} \cos^7 \varphi \sin \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^4}{k^4} \cos \varphi \sin^7 \varphi d\varphi + 3 \cdot \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi + 3 \cdot \frac{ab^3}{hk^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{2}{15} abc \left( \frac{a^4}{8h^4} + \frac{b^4}{8k^4} + 3 \cdot \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{ab^3}{hk^3} \cdot \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{60} abc \left( \frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

$$\text{【4117】} \quad \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

提示 仿 4116 题的解法.

解 令  $x = a \cos^2 \varphi \cos^2 \psi$ ,  $y = b \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$ ,  $z = c \sin^2 \psi$ , 则有  $|I| = 4abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi$ , 且区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi dr = \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} \psi \sin^7 \psi d\psi \\ &= \frac{4}{3} abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(8)\Gamma(4)}{\Gamma(12)} = \frac{1}{3} abc \frac{3!}{7!} \cdot \frac{7!}{11!} = \frac{abc}{554400}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

$$\text{【4118】} \quad \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解题思路 作变量代换  $x = a \cos^2 \varphi \cos \psi$ ,  $y = b \sin^2 \varphi \cos \psi$ ,  $z = c \sin \psi$ .

则有  $|I| = 2abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi$ , 且区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

解 令  $x = a \cos^2 \varphi \cos \psi$ ,  $y = b \sin^2 \varphi \cos \psi$ ,  $z = c \sin \psi$ , 则有  $|I| = 2abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi$ , 且区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$V = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi dr = \frac{2}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = \frac{1}{3} abc.$$

$$\text{【4119】} \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x = 2y, \quad 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$$

解题思路 作变量代换  $z = u(x^2 + y^2)$ ,  $xy = v$ ,  $x = yw$ , 则

$$x = \sqrt{vw}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad z = u \left( vw + \frac{v}{w} \right) \quad \text{及} \quad |I| = \frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2},$$

且区域  $V$  为  $1 \leq u \leq 2$ ,  $a^2 \leq v \leq 2a^2$ ,  $\frac{1}{2} \leq w \leq 2$ .

解 令  $z = u(x^2 + y^2)$ ,  $xy = v$ ,  $x = yw$ , 则

$$x = \sqrt{vw}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad z = u \left( vw + \frac{v}{w} \right).$$

变换的雅可比行列式为



$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw + \frac{v}{w} & u\left(w + \frac{1}{w}\right) & u\left(v - \frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix} = -\left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right),$$

而区域  $V$  为  $1 \leq u \leq 2, a^2 \leq v \leq 2a^2, \frac{1}{2} \leq w \leq 2$ .

于是, 体积为

$$V = \int_1^2 du \int_{a^2}^{2a^2} dv \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right) dw = \frac{3a^4}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) dw = \frac{9a^4}{4}.$$

**【4120】**  $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0 (x > 0)$ .

解 令  $x = r \cos \varphi, y = y, z = r \sin \varphi$ , 则区域  $V$  为

$$a \leq r \leq b, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, -r \sqrt{\cos 2\varphi} \leq y \leq r \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dy = \frac{4}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^{**}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

\*\* ) 利用延拓公式有  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} \pi$ .

**【4121】**  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}$ .

解 采用球坐标  $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$ , 则区域  $V$  的  $\frac{1}{8}$  部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \tan^{\frac{1}{3}} \psi.$$

于是, 体积为  $V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \tan^{\frac{1}{3}} \psi} r^2 \cos \psi dr = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}$ .

**【4122】**  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{h} \cdot e^{\frac{\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}}{c^2}}$ .

解 令  $x = ar \cos \varphi \cos \psi, y = br \sin \varphi \cos \psi, z = cr \sin \psi$ , 则区域  $V$  的  $\frac{1}{4}$  部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于  $z \geq 0$ , 故区域  $V$  在  $Oxy$  平面的上方.

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi}\right)^{\frac{1}{3}}} abc r^2 \cos \psi dr = \frac{4c^2 ab}{3h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi e^{-\sin^2 \psi} d\psi \\ &= -\frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\sin^2 \psi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h} (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

$$\text{【4123】} \quad \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right), \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x=0, x=a.$$

解题思路 作变量代换  $\frac{x}{a} = u, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = w$ ,

则有  $|I| = abc \left( \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{abc} \right)$ , 且区域  $V$  为  $0 \leq u \leq 1, -1 \leq w \leq 1, \frac{2}{\pi} w \arcsin w \leq v \leq 1$ .

解 令  $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ , 则

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc},$$

且区域  $V$  变为  $0 \leq u \leq 1, \frac{2}{\pi} w \arcsin w \leq v \leq 1, -1 \leq w \leq 1$ .

于是,  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$ , 且体积为

$$\begin{aligned} V &= abc \int_0^1 du \int_{-1}^1 dw \int_{\frac{2}{\pi} w \arcsin w}^1 dv = 2abc \int_0^1 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} w \arcsin w \right] dw = 2abc - \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 \arcsin w d(w^2) \\ &= abc + \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 w^2 (1 - w^2)^{-\frac{1}{2}} dw = abc + \frac{abc}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} dt = abc + \frac{abc}{\pi} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} abc. \end{aligned}$$

$$\text{【4124】} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, x=0, z=0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

提示 仿 4123 题的解法.

解 令  $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ , 则  $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{abc}$ .

且区域  $V$  变为

$$0 \leq u \leq w, w e^{-w} \leq v \leq w, 0 \leq w \leq 1.$$

于是,  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$ , 且体积为

$$V = abc \int_0^1 dw \int_0^w du \int_{we^{-w}}^w dv = abc \int_0^1 (w^2 - w^2 e^{-w}) dw = abc \left( \frac{1}{3} - 2 + 5e^{-1} \right) = 5abc \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right).$$

【4125】 曲面  $x^2 + y^2 + az = 4a^2$  将球  $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$  分成两部分, 求这两部分的体积之比.

解 曲面  $x^2 + y^2 + az = 4a^2$  与球面  $x^2 + y^2 + (z - 2a)^2 = 4a^2$  的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2 \\ z = a, \end{cases}$$

且有公共的顶点  $(0, 0, 4a)$ . 球内位于曲面  $x^2 + y^2 + az = 4a^2$  下方部分的体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4az - z^2} dx dy + \int_a^{4a} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4a^2 - az} dx dy = \int_0^a \pi(4az - z^2) dz + \int_a^{4a} \pi(4a^2 - az) dz \\ &= 2\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^3 + 12\pi a^3 - \frac{15}{2}\pi a^3 = \frac{37}{6}\pi a^3. \end{aligned}$$

从而, 另一部分的体积

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是, 球被曲面所分的两部分体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}.$$

【4126】 求以曲面  $x^2 + y^2 = az$ ,  $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $a > 0$ ) 为界的物体的体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a. \end{cases}$$

又曲面  $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$  的顶点为  $(0, 0, 2a)$ . 于是, 体积为

$$V = \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq az} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{x^2+y^2 \leq (2a-z)^2} dx dy = \int_0^a \pi a z dz + \int_a^{2a} \pi (2a-z)^2 dz = \frac{\pi a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{5\pi a^3}{6}.$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

于是, 曲面的表面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} dx dy + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} a^2 r dr + \sqrt{2} \pi a^2 \\ &= \frac{\pi a^2}{6} (6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

【4127】 求以平面  $a_1 x + b_1 y + c_1 z = \pm h_1$ ,  $a_2 x + b_2 y + c_2 z = \pm h_2$ ,  $a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h_3$ , 为界的平行六面体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解题思路 作变量代换

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = u, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = v, \quad a_3 x + b_3 y + c_3 z = w,$$

则有  $|I| = \frac{1}{|\Delta|}$ , 且区域  $V$  为  $-h_1 \leq u \leq h_1$ ,  $-h_2 \leq v \leq h_2$ ,  $-h_3 \leq w \leq h_3$ .

解 令  $a_1 x + b_1 y + c_1 z = u$ ,  $a_2 x + b_2 y + c_2 z = v$ ,  $a_3 x + b_3 y + c_3 z = w$ ,

则有  $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$ . 于是  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$ , 且体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|\Delta|} dw = \frac{8h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}.$$

【4128】 求以曲面  $(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 = h^2$  为界的物体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

提示 仿 4127 题的解法.

解 令  $a_1 x + b_1 y + c_1 z = u$ ,  $a_2 x + b_2 y + c_2 z = v$ ,  $a_3 x + b_3 y + c_3 z = w$ ,

则有  $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$ . 于是,  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$ , 且体积为

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq h^2} du dv dw = \frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

【4129】 求以曲面  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n > 1)$

为界的物体的体积.

解 令  $x = ar \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = br \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = cr \sin \psi$ , 则有  $|I| = abcr^2 \cos \psi$ , 且区域  $V$  的  $\frac{1}{4}$  为



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin \psi \cos^{2n-1} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi}}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin \psi \cos^{2n-1} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi}}} abc r^2 \cos \varphi dr = \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \psi \cos^{2n-1} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi} d\psi \\ &= \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{t^{2n} + (1-t^2)^n} = -\frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-1} d(1-t^2)}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\ &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2} dx}{(1-x)^n + x^n} = \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{\frac{1}{(1-x)^2} dx}{1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^n} \\ &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} = \frac{1}{3h} \pi abc^2 \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \frac{abc^2}{h}. \end{aligned}$$

\* ) 作代换  $t = \frac{x}{1-x}$ .

\* ) 利用 3851 题的结果.

【4130】一物体位于正卦限  $Oxyz$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ), 并以曲面

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m > 0, n > 0, p > 0), x=0, y=0, z=0$$

为界, 求其体积.

提示 作变量代换  $x = ar^{\frac{2}{m}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi \cos^{\frac{2}{m}} \psi, y = br^{\frac{2}{n}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, z = cr^{\frac{2}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \psi$ , 则有

$$I = \frac{8abc}{mnp} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} \cos^{\frac{2}{m} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{n} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p} - 1} \psi.$$

解 令

$$x = ar^{\frac{2}{m}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi \cos^{\frac{2}{m}} \psi, \quad y = br^{\frac{2}{n}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, \quad z = cr^{\frac{2}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \psi,$$

则

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \frac{8abc}{mnp} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} \cos^{\frac{2}{m} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{n} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p} - 1} \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{8abc}{mnp} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{n} - 1} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p} - 1} \psi d\psi \cdot \int_0^1 r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} dr \\ &= \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}} \\ &= \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)} \frac{mnp}{2(mn + np + mp)} \\ &= \frac{abc}{mn + np + mp} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

## § 8. 三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量 若一物体占有区域  $V$ ,  $\rho = \rho(x, y, z)$  为它在点  $(x, y, z)$  的密度, 则该物体的质量等于

$$M = \iiint_V \rho dx dy dz. \quad (1)$$

2° 物体的质心 物体的质心坐标  $(x_0, y_0, z_0)$  按下列公式来计算

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dx dy dz, \\ y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho y dx dy dz, \\ z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dx dy dz. \end{cases} \quad (2)$$

若物体是均匀的, 则在公式(1)和(2)中可令  $\rho = 1$ .

3° 转动惯量 积分

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 dx dy dz,$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 dx dy dz$$

(其中  $r$  为物体各点  $(x, y, z)$  与轴  $l$  的距离) 称为物体对于某轴  $l$  的转动惯量. 特别是, 对于坐标轴  $Ox, Oy, Oz$  分别有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz},$$

积分

$$I_0 = \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

称为物体对坐标原点的转动惯量.

显然有

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4° 引力势 积分

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

称为物体在点  $P(x, y, z)$  的牛顿引力势. 式中  $V$  为物体所占区域,  $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$  为物体的密度, 且

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

质量为  $m$  的质点吸引物体的力在坐标轴  $Ox, Oy, Oz$  上的投影  $X, Y, Z$  分别等于

$$X = cm \frac{\partial u}{\partial x} = cm \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad Y = cm \frac{\partial u}{\partial y} = cm \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad Z = cm \frac{\partial u}{\partial z} = cm \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

其中  $c$  为引力常量.

**【4131】** 设物体在点  $M(x, y, z)$  的密度由公式  $\rho = x + y + z$  给出, 求占有单位体积  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  之物体的质量.

解 质量以  $M$  表示, 则按题设有  $M = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \frac{3}{2}$ .

**【4132】** 若物体的密度按规律  $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  (其中  $\rho_0 > 0$  及  $k > 0$  为常数) 而变化, 求占有无限区域  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$  的物体的质量.

解 若令  $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$ , 则质量为

$$M = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\psi \int_1^{+\infty} r^2 \rho_0 e^{-kr} \cos \psi dr = 4\pi \rho_0 \int_1^{+\infty} r^2 e^{-kr} dr$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} r^2 de^{-kr} = -\frac{4\pi\rho_0}{k} r^2 e^{-kr} \Big|_1^{+\infty} + \frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} 2re^{-kr} dr = \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} r de^{-kr} \\
&= \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} re^{-kr} \Big|_1^{+\infty} + \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} e^{-kr} dr = 4\pi\rho_0 e^{-k} \left( \frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right).
\end{aligned}$$

求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标:

**【4133】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z=c.$

提示 作变量代换  $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, z = z$ .

解 若令  $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, z = z$ , 则质量为

$$M = ab \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r dr = \frac{\pi abc}{3}.$$

设质心坐标为  $x_0, y_0, z_0$ , 由对称性知  $x_0 = y_0 = 0$ , 而

$$z_0 = \frac{ab}{M} \int_0^c z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r dr = \frac{3}{\pi abc} \cdot \frac{\pi abc^2}{4} = \frac{3c}{4}.$$

于是, 质心为点  $(0, 0, \frac{3c}{4})$ .

**【4134】**  $z = x^2 + y^2, x + y = a, x=0, y=0, z=0.$

解 物体的质量为

$$M = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{6} a^4.$$

质心的横坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2a}{5}.$$

同理可求得  $y_0 = \frac{2a}{5}$ , 而

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz = \frac{1}{M} \int_0^a \left( \frac{a^5}{10} - \frac{1}{2} a^4 x + \frac{4}{3} a^3 x^2 - 2a^2 x^3 + 2ax^4 - \frac{14}{15} x^5 \right) dx \\
&= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{7}{180} a^6 = \frac{7}{30} a^2.
\end{aligned}$$

于是, 质心的坐标为  $x_0 = y_0 = \frac{2}{5} a, z_0 = \frac{7}{30} a^2$ .

**【4135】**  $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, z=0.$

解 物体的质量为  $M = \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{p^3}{28}.$

质心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} x dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{p^4}{72} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{18} p, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = 0.$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z dz = \frac{p^5}{704} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{176} p.$$

**【4136】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

提示 作变量代换  $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b \sin \varphi \cos \psi, z = c \sin \psi$ , 并利用对称性.

解 若令

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b \sin \varphi \cos \psi, z = c \sin \psi,$$

则质量为

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi dr = \frac{1}{6} \pi abc.$$

于是,

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \cdot a \cos \varphi \cos \psi dr = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \int_0^1 a^2 b c r^3 dr$$



$$= \frac{1}{16} \pi a^2 bc \cdot \frac{6}{\pi abc} = \frac{3}{8} a.$$

利用对称性知, 质心的坐标为  $x_0 = \frac{3}{8} a, y_0 = \frac{3}{8} b, z_0 = \frac{3}{8} c$ .

**【4137】**  $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z > 0)$ .

解 物体的质量为  $M = \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - z^2}} = 4 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{8a^3}{3}$ .

于是,  $x_0 = \frac{1}{M} \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - z^2}} = 0$ .

同理可得  $y_0 = 0$ , 而  $z_0 = \frac{1}{M} \int_0^a z dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - z^2}} = a^3 \cdot \frac{3}{8a^3} = \frac{3}{8} a$ .

于是, 质心的坐标为  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{3}{8} a$ .

**【4138】**  $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z$ .

解 由  $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z$  所围成的区域在平面  $z = 0$  上的投影为圆  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ .

若引用代换

$$x = 1 + r \cos \theta, y = 1 + r \sin \theta,$$

则质量为  $M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{2-r(\cos\theta+\sin\theta)} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{r^2}{2}) r dr = \pi$ .

于是,

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{2-r(\cos\theta+\sin\theta)} (1+r\cos\theta) dz = \frac{1}{M} \left[ \pi + \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 (1 - \frac{r^2}{2}) dr \right] = \frac{\pi}{M} = 1.$$

同理可得  $y_0 = 1$ , 而

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{2-r(\cos\theta+\sin\theta)} z dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left[ 3 + (\sin\theta + \cos\theta)(2r - r^3) - \frac{1}{4} r^4 - r^6 \right] r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10\pi}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

于是, 质心的坐标为  $x_0 = y_0 = 1, z_0 = \frac{5}{3}$ .

**【4139】**  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc} (x > 0, y > 0, z > 0)$ .

解 作代换  $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b \sin \varphi \cos \psi, z = c \sin \psi$ , 则物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos \varphi \sin \psi} abc r^2 \cos \psi dr = \frac{1}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \sin^3 \psi d\psi \\ &= \frac{1}{3} abc \cdot \frac{1}{2} B(2, 2) \cdot \frac{1}{2} B(4, 2) = \frac{1}{12} abc \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)} = \frac{abc}{1440}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos \varphi \sin \psi} r^3 \cos^2 \psi \cos \varphi dr = \frac{a^2 bc}{4M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} \psi \sin^3 \psi d\psi \\ &= \frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} B\left(3, \frac{5}{2}\right) B\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{11}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(8)} \\ &= \frac{18a^2 bc \pi}{16 \cdot 16 \cdot 7!} \cdot \frac{1440}{abc} = \frac{9\pi}{448} a. \end{aligned}$$

由对称性知, 质心的坐标为  $x_0 = \frac{9\pi}{448} a, y_0 = \frac{9\pi}{448} b, z_0 = \frac{9\pi}{448} c$ .

**【4140】**  $z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), x + y = \pm 1, x - y = \pm 1$ .

解 作代换:  $x - y = u, x + y = v$ , 则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2}, \quad z = \frac{u^2+v^2}{4} \quad \text{及} \quad z = \frac{u^2+v^2}{2},$$

且  $|I| = \frac{1}{2}$  及区域  $V$  为:  $-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1, \frac{u^2+v^2}{4} \leq z \leq \frac{u^2+v^2}{2}$ . 于是,

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} dz = \frac{1}{3}.$$

$$x_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} (u+v) dz = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} (v-u) dz = 0,$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} z dz = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) dv \\ &= \frac{3}{64M} \int_{-1}^1 \left( 2u^4 + \frac{4u^2}{3} + \frac{2}{5} \right) du = \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

于是, 质心的坐标为  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{7}{20}$ .

**【4141】**  $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x=0, y=0, z=0 \quad (n>0, x>0, y>0, z>0).$

**解** 作代换  $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, z = c \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \sin^{\frac{2}{n}} \psi.$

则有  $|I| = \frac{4}{n^2} abc r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi.$  于是,

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{n^2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr \\ &= \frac{4}{n^2} abc \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}. \end{aligned}$$

于是, 质心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \cdot \frac{4}{n^2} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{6}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi d\psi \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \\ &= \frac{3n^2}{abc} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} a, \end{aligned}$$

同理可求得

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} b, \quad z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} c.$$

**【4142】** 求形状为立方体  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  的物体的质心坐标, 设此物体在点  $(x, y, z)$  的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1.$

解 物体的质量为

$$M = \int_0^1 x^{\frac{1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{1}{1-\gamma}} dz = \frac{1-\alpha}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\beta}{\beta} y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Big|_0^1 \\ = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

于是, 质心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{1}{1-\alpha}+1} dx \int_0^1 y^{\frac{1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{1}{1-\gamma}} dz = \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} (1-\alpha) \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha.$$

同理可求得  $y_0 = \beta$ ,  $z_0 = \gamma$ .

求以下列曲面(参变量是正的)为界的均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

【4143】  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x=0, y=0, z=0.$

解  $I_{xy} = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z^2 dz = \frac{c^3}{3} \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 dy \\ = -\frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 \Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx = \frac{abc^3}{60}.$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{a^3 bc}{60}, \quad I_{xz} = \frac{ab^3 c}{60}.$$

【4144】  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

提示 作代换  $x = a \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = b \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = c \sin \psi$ , 并利用对称性.

解 若令  $x = a \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = b \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = c \sin \psi$ , 则有

$$I_{xy} = abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^3 \cos \psi \sin^2 \psi dr = \frac{abc^3}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin^2 \psi d\psi = \frac{abc^3}{15} 2\pi \sin^3 \psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3 bc, \quad I_{xz} = \frac{4}{15} \pi ab^3 c.$$

【4145】  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z=c.$

解 若令  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ , 则有

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr \int_c^1 z^2 dz = \frac{1}{5} \pi abc^3,$$

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr \int_c^1 (\cos \varphi)^2 dz = a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 (1-r) r^3 dr = \frac{1}{20} \pi a^3 bc.$$

利用对称性可得

$$I_{xz} = \frac{1}{20} \pi ab^3 c.$$

【4146】  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$

解 若令  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ , 则得区域  $V$  为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos \varphi, \quad -c \sqrt{1-r^2} \leq z \leq c \sqrt{1-r^2}.$$

于是,

$$I_{xy} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} ab r dr \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} z^2 dz = \frac{2}{3} abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} r dr \\ = \frac{2}{15} abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}] d\varphi = \frac{4}{15} abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi \\ = \frac{4}{15} abc^3 \left( \varphi + \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi + \frac{1}{5} \cos^5 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2abc^3}{225} (15\pi - 16).$$



$$\begin{aligned}
I_{xz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abrd r \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}} (\arccos\varphi)^2 dz = 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 dr \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt = 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{ \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} d\varphi = 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} + \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} \cos^2\varphi d\varphi \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left( - \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2\varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \cos^2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \cos^2\varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left( \frac{\pi}{15} - \frac{92}{1575} \right) = \frac{2a^3bc}{1575} (105\pi - 92),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abrd r \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}} (b r \sin\varphi)^2 dz = 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 \sin^2\varphi dr \\
&= 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt = 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} + \int_{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} \sin^2\varphi d\varphi \\
&= 2ab^3c \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \sin^2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \sin^2\varphi d\varphi \right\} \\
&= 2ab^3c \left( \frac{\pi}{15} - \frac{272}{1575} \right) = \frac{2ab^3c}{1575} (105\pi - 272).
\end{aligned}$$

**【4147】**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

解 两曲面在  $Oxy$  平面上的投影为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} - 2 \frac{y}{b} = 0$ , 即  $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 = 2$ . 若令

$$\frac{x}{a} = 1 + r \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = 1 + r \sin\varphi,$$

则得区域  $V$  为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad c \left[ 1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) \right] \leq z \leq c [2 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)].$$

于是,

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} abrd r \int_{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]} z^2 dz = \frac{1}{3} abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \left[ 8 + 12r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 6r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left( 1 + \frac{r^2}{2} \right)^3 - 3 \left( 1 + \frac{r^2}{2} \right)^2 r(\cos\varphi + \sin\varphi) - 3 \left( 1 + \frac{r^2}{2} \right) r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 \right] dr = \frac{7}{2} \pi abc^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} a^3 b r (1 + r \cos\varphi)^2 dr \int_{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]} dz = a^3 bc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r (1 + 2r \cos\varphi + r^2 \cos^2\varphi) \left( 1 - \frac{r^2}{2} \right) dr \\
&= \frac{4}{3} \pi a^3 bc.
\end{aligned}$$

利用对称性得  $I_{xz} = \frac{4}{3} \pi ab^3 c$ .

求以下列曲面为界的均匀物体对于  $Oz$  轴的转动惯量:

**【4148】**  $z = x^2 + y^2, \quad x + y = \pm 1, \quad x - y = \pm 1, \quad z = 0.$

提示 注意  $I_z = I_{xz} + I_{yz}$ , 并令  $x + y = u, \quad x - y = v$ .

解 曲面所界的均匀物体对于  $Oz$  轴的转动惯量记作  $I_z$ , 则  $I_z = I_{xz} + I_{yz}$ .

若令  $x + y = u, \quad x - y = v$ , 则有  $x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2+v^2}{2}$ , 且  $|J| = \frac{1}{2}$ . 于是,

$$I_z = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_0^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{u-v}{2} \right)^2 + \left( \frac{u+v}{2} \right)^2 \right\} dz = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 \frac{(u^2+v^2)^2}{8} dv = \frac{14}{45}.$$

【4149】  $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0).$

解 若令  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , 则有  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{于是, } I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} r^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 \sqrt{2-r^2} - r^4) dr = \int_0^{2\pi} \left( \frac{8\sqrt{2}-7}{15} - \frac{1}{5} \right) d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2}-5). \end{aligned}$$

\* ) 作代换  $r = \sqrt{2} \sin t$ .

【4150】 求质量为  $M$  的非均匀球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  对于其直径的转动惯量. 设球内各点  $P(x, y, z)$  的密度与该点至球心距离成正比.

解 不失一般性, 取  $Oz$  轴在球内的一段作为直径. 若令

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi,$$

则质量为

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos \psi \cdot k r dr = k\pi R^4,$$

由此得  $k = \frac{M}{\pi R^4}$ . 从而, 密度  $\rho = \frac{Mr}{\pi R^4}$ . 于是, 所求的转动惯量为

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos^2 \psi \cdot \frac{Mr^3}{\pi R^4} \cos \psi dr = \frac{2M}{R^4} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi \right) \left( \int_0^R r^4 dr \right) = \frac{4MR^2}{9}.$$

【4151】 证明等式:

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

其中  $I_l$  为物体对某轴  $l$  的转动惯量,  $I_{l_0}$  为对平行于  $l$  并通过物体质心的轴  $l_0$  的转动惯量,  $d$  为此二轴之间的距离及  $M$  为物体的质量.

证 取质心为坐标原点  $O$ ,  $z$  轴与  $l_0$  重合,  $l$  与  $Oxy$  平面的交点为  $(\zeta, \eta, 0)$ , 如图 8.59 所示, 则

$$\begin{aligned} I_l &= \iiint_V [(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2] \rho dv \\ &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv + (\zeta^2 + \eta^2) \iiint_V \rho dv - 2\zeta \iiint_V x \rho dv - 2\eta \iiint_V y \rho dv \quad (1) \end{aligned}$$

由于质心在原点, 故  $x_0 = y_0 = 0$ , 即

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho dv = 0 \quad \text{及} \quad y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho dv = 0,$$

并且  $M = \iiint_V \rho dv, d^2 = \zeta^2 + \eta^2$ , 代入(1)式, 最后得

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

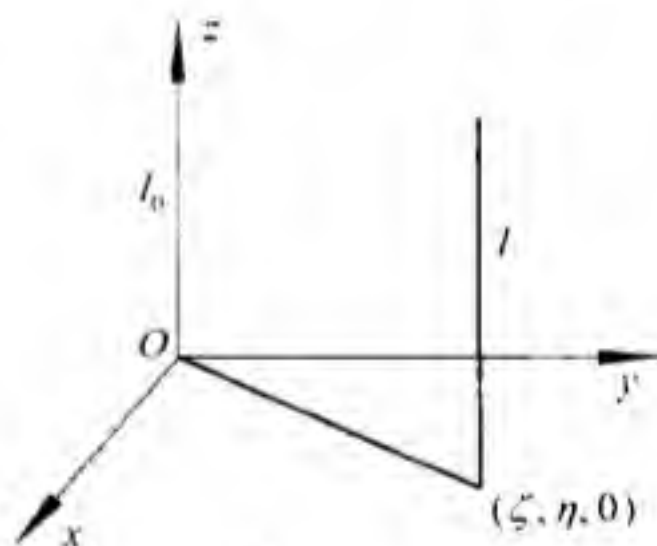


图 8.59

【4152】 证明: 占有区域  $V$  的物体对过其质心  $O(0, 0, 0)$  并与坐标轴成角  $\alpha, \beta, \gamma$  的轴  $l$  的转动惯量等于:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \alpha \cos \gamma,$$

其中  $I_x, I_y, I_z$  为物体对坐标轴的转动惯量, 而

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy dx dy dz, \quad K_{xz} = \iiint_V \rho xz dx dy dz, \quad K_{yz} = \iiint_V \rho yz dx dy dz$$

为惯性积.

证 如图 8.60 所示, 距离

$$d = \frac{|\vec{OM} \times \vec{OM'}|}{|\vec{OM'}|}$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r \cos \beta & r \cos \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ r \cos \gamma & r \cos \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ r \cos \alpha & r \cos \beta \end{vmatrix}^2}$$

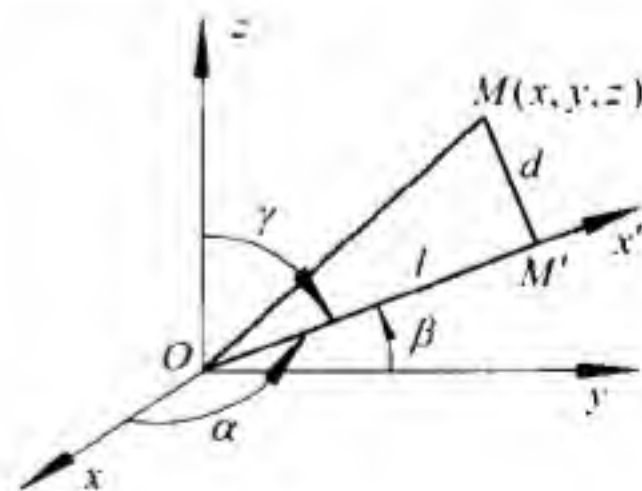


图 8.60



其中  $r = |\overrightarrow{OM}|$ . 由于  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 故有

$$d^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma.$$

于是,

$$\begin{aligned} I_t &= \iiint_V \rho d^2 \cdot dx dy dz \\ &= \cos^2 \gamma \iiint_V \rho \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz + \cos^2 \alpha \iiint_V \rho \cdot (y^2 + z^2) dx dy dz + \cos^2 \beta \iiint_V \rho \cdot (x^2 + z^2) dx dy dz \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \iiint_V \rho xy dx dy dz - 2 \cos \beta \cos \gamma \iiint_V \rho yz dx dy dz - 2 \cos \gamma \cos \alpha \iiint_V \rho xz dx dy dz \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{xz} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

证毕.

**【4153】** 求密度为  $\rho_0$  的均匀圆柱体  $x^2 + y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h$  对直线  $x = y = z$  的转动惯量.

提示 利用 4152 题的结果.

解 直线  $x = y = z$  通过圆柱体的质心  $O(0, 0, 0)$  且具有方向余弦  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 若取极坐标,

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad I_x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz = \left( \frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0, \\ I_y &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) dz = \left( \frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0, \\ I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 dz = \pi h a^4 \rho_0, \quad K_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 \cos \varphi \sin \varphi dz = 0, \\ K_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r \sin \varphi z dz = 0, \quad K_{xz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r \cos \varphi z dz = 0, \end{aligned}$$

于是, 利用 4152 题结果即得

$$\begin{aligned} I_t &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{xz} \cos \gamma \cos \alpha \\ &= \frac{\rho_0}{3} \left( \frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \pi a^4 h \right) = \frac{2}{3} \pi \rho_0 a^2 h \left( a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right) = \frac{M}{3} \left( a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right), \end{aligned}$$

其中  $M = 2\pi \rho_0 a^2 h$  为圆柱体的质量.

**【4154】** 求密度为  $\rho_0$  以曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

为界的均匀物体对坐标原点的转动惯量.

解 若令  $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$ , 则对坐标原点的转动惯量为

$$I_t = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \cos \psi} \rho_0 \cdot r^2 \cdot r^2 \cos \psi dr = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \psi d\psi = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{5} \cdot \frac{5\pi}{32} = \frac{\pi^2 a^3 \rho_0}{8}.$$

\* ) 利用 2282 题的结果.

**【4155】** 求密度为  $\rho_0$  的均匀球体  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$  在点  $(x, y, z)$  的牛顿引力势.

提示 取  $O\xi$  轴通过点  $P(x, y, z)$ , 即易获解.

解 由对称性显然可知, 所求的牛顿引力势与  $\xi, \eta, \zeta$  轴取的方向无关. 今取  $O\xi$  轴通过点  $P(x, y, z)$ , 即得牛顿引力势

$$u(x, y, z) = \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \rho_0 \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}} = \rho_0 \int_R^R d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}},$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 积分之, 得

$$u(x, y, z) = 2\pi \rho_0 \int_R^R (\sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} - |\zeta - r|) d\zeta.$$

$$\text{由于} \quad \int_R^R \sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} d\zeta = \frac{1}{3r} [(R+r)^3 - |R-r|^3] = \begin{cases} \frac{2}{3} R^3 \frac{1}{r} + 2rR, & r > R, \\ \frac{2}{3} r^2 + 2R^2, & r \leq R, \end{cases}$$



及

$$\int_{-R}^R |\zeta - r| d\zeta = \begin{cases} 2Rr, & r > R, \\ r^2 + R^2, & r \leq R. \end{cases}$$

因而,最后得

$$u(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0, & r > R, \\ 2\pi\rho_0 \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right), & r \leq R. \end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论:

(1) 在球外一点上的牛顿引力势,与将球的全部质量集中在它的中心处时一样;

(2) 如考察一个内半径为  $R_1$  而外半径为  $R_2$  的空心球,则它在位于其空隙处的一点 ( $r < R$ ) 上的牛顿引力势可表示成差

$$u(x, y, z) = u_2(x, y, z) - u_1(x, y, z) = \left(R_2^2 - \frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0 - \left(R_1^2 - \frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0 = 2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho_0.$$

它与  $r$  无关,故空心球体在其空隙范围内的引力势保持一个常数值.

**【4156】** 求球壳层  $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$  在点  $P(x, y, z)$  的牛顿引力势. 设密度  $\rho = f(R)$ , 其中  $f$  为已知函数, 而  $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ .

提示 仿 4155 题.

解 取  $O\xi$  轴通过点  $P(x, y, z)$ , 即得牛顿引力势

$$u(x, y, z) = \iiint_{R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2} f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}},$$

其中  $r = x^2 + y^2 + z^2$ .

若引入球坐标, 即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \cos\psi \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin\psi}} = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 f(\rho) \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin\psi}} \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left( -\frac{1}{\rho r} \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin\psi} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left\{ -\frac{1}{\rho r} [|\rho - r| - (\rho + r)] \right\} d\rho \\ &= \begin{cases} 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) d\rho, & \rho > r, \\ 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{r} f(\rho) d\rho, & \rho \leq r. \end{cases} \end{aligned}$$

合并之,最后得

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min\left(\frac{\rho^2}{r}, \rho\right) d\rho.$$

**【4157】** 求密度  $\rho_0$  恒定的圆柱体  $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$  在点  $P(0, 0, z)$  的牛顿引力势.

解 若引用柱坐标, 即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\zeta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} = 2\pi\rho_0 \int_0^a \sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2} \Big|_0^a d\zeta \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^a [\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - |\zeta - z|] d\zeta \\ &= 2\pi\rho_0 \left[ \frac{\zeta - z}{2} \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} + \frac{a^2}{2} \ln|(\zeta - z)| + \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - \frac{(\zeta - z)|\zeta - z|}{2} \right] \Big|_0^a \\ &= \pi\rho_0 \left\{ (h - z) \sqrt{a^2 + (h - z)^2} + z \sqrt{a^2 + z^2} - [(h - z)|h - z| + z|z|] + a^2 \ln \left| \frac{h - z + \sqrt{a^2 + (h - z)^2}}{-z + \sqrt{a^2 + z^2}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

**【4158】** 半径为  $R$  质量为  $M$  的均匀球体  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$  以怎样的力吸引质量为  $m$  的质点  $P(0, 0, a)$ ?

解 引力在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的投影为零, 即  $X = Y = 0$ , 而在  $Oz$  轴上的投影为

$$Z = k\rho_0 m \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \frac{(\zeta - a) d\xi d\eta d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} = km\rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= km\rho_0 \int_R^R (\zeta-a) d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{k^2-\zeta^2}} \frac{rdr}{[r^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}} = 2\pi km\rho_0 \int_{-R}^R (\zeta-a) \left( \frac{1}{|\zeta-a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}} \right) d\zeta \\
&= 2\pi km\rho_0 \int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta-a) d\zeta - 2\pi km\rho_0 \int_{-R}^R \frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}},
\end{aligned}$$

其中  $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$ .

分别求上述两个积分:

$$\text{当 } a \geq R \text{ 时, } \int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta-a) d\zeta = - \int_{-R}^R d\zeta = -2R,$$

$$\text{当 } a < R \text{ 时, } \int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta-a) d\zeta = - \int_{-R}^a d\zeta + \int_a^R d\zeta = -2a;$$

而

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}} &= -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \frac{R^2+a^2-2a\zeta-(R^2+a^2)}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}} d\zeta - a \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}} \\
&= -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2+a^2-2a\zeta} d\zeta + \left( \frac{R^2+a^2}{2a} - a \right) \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}} \\
&= -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2+a^2-2a\zeta} d\zeta + \frac{R^2-a^2}{2a} \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}}.
\end{aligned}$$

当  $a \geq R$  时, 将上式右端分别积分, 得结果:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{1}{1a^2} (R^2+a^2-2a\zeta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{R^2-a^2}{2a} \left( -\frac{1}{2a} \right) \cdot 2 \sqrt{R^2+a^2-2a\zeta} \right] \Big|_{-R}^R \\
&= \frac{1}{6a^2} [(a-R)^3 - (a+R)^3] - \frac{R^2-a^2}{2a^2} [(a-R) - (a+R)] = \frac{2R^3}{3a^2} - 2R;
\end{aligned}$$

当  $a < R$  时, 积分得结果:

$$\frac{1}{6a^2} [(R-a)^3 - (a+R)^3] - \frac{R^2-a^2}{2a^2} [(R-a) - (R+a)] = -\frac{4a}{3}.$$

$$\text{于是, 当 } a \geq R \text{ 时, 则 } Z = 2\pi km\rho_0 \left( -2R - \frac{2R^3}{3a^2} + 2R \right) = -\frac{4}{3a^2} \pi km\rho_0 R^3 = -\frac{kMm}{a^2};$$

$$\text{当 } a < R \text{ 时, 则 } Z = 2\pi km\rho_0 \left( -2a + \frac{4a}{3} \right) = -\frac{4}{3} \pi akm\rho_0 = -\frac{kMm}{R^3} a.$$

从以上结果可以得到下面两个推论:

(1) 位于球外的一点 ( $a \geq R$ ) 因球体而受到的引力相当于将球体的全部质量  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$  集中在它的中心处时受到的引力, 引力的方向朝向球心;

(2) 对于在球里面的一点 ( $a < R$ ) 来说, 引力与  $R$  无关, 其大小与  $R=a$  时的情况一样, 即在点  $P$  外面的球壳部分对  $P$  点的引力为零.

**【4159】** 求密度为  $\rho_0$  的均匀圆柱体  $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$  对单位质量质点  $P(0, 0, z)$  的引力.

**解** 由对称性知, 引力在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的投影为零, 即  $X=Y=0$ . 若引用柱坐标, 即得引力在  $Oz$  轴上的投影为

$$\begin{aligned}
Z &= k\rho_0 \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq a^2} d\xi d\eta \int_0^h \frac{(\zeta-z)d\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h \frac{(\zeta-z)d\zeta}{[r^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi k\rho_0 \int_0^a r \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}} \right] dr = 2\pi k\rho_0 [\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{a^2+(h-z)^2} - |z| + |h-z|].
\end{aligned}$$

易知,

当  $0 \leq z < \frac{h}{2}$  时,  $Z > 0$ , 此时吸引力朝着向上的铅垂线;

当  $\frac{h}{2} < z \leq h$  时,  $Z < 0$ , 此时吸引力朝着向下的铅垂线;



当  $z = \frac{h}{2}$  时,  $Z=0$ , 引力为零.

**【4160】** 求密度为  $\rho_0$  的均匀球锥体对位于其顶点的单位质量质点的引力, 设球面半径为  $R$ , 而轴截面的扇形的角等于  $2\alpha$ .

**解** 由对称性知, 引力在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的投影为零, 即  $X=Y=0$ . 若引用球坐标, 即得引力在  $Oz$  轴上的投影为

$$Z = \iiint_V \frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dx dy dz = k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^R dr = k\pi R\rho_0 \sin^2\alpha.$$

## § 9. 二重和三重广义积分

1° 无界区域的情形 若二维区域  $\Omega$  是无界的, 函数  $f(x, y)$  在区域  $\Omega$  上连续, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中  $\Omega_n$  是可求积有界封闭区域, 并且它们组成  $\Omega$  的任意一个竭尽递增序列\*. 若右端的极限存在且与序列  $\Omega_n$  的选择无关, 则相应积分称为收敛的; 否则称为发散的.

类似地定义出连续函数在无界三维区域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形 若函数  $f(x, y)$  在有界封闭区域  $\Omega$  内除了点  $P(a, b)$  而外处处是连续的, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus U_{\epsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

其中  $U_{\epsilon}$  是包含点  $P$  的以  $\epsilon$  为直径的区域, 并且当极限存在时, 所研究的积分称为收敛的; 否则称为发散的.

假定在点  $P(a, b)$  的邻近有等式

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数  $\varphi(x, y)$  的绝对值是介于二正数  $m$  和  $M$  之间, 且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

则 1) 当  $\alpha < 2$  时, 积分(2)收敛; 2) 当  $\alpha \geq 2$  时, 积分(2)发散.

若函数  $f(x, y)$  有不连续的线, 也可类似地定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分的概念易于引伸到三重积分的情形.

**研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性** ( $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$ ):

**【4161】**  $\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy.$

**解题思路** 注意到广义重积分收敛必绝对收敛.

由题设知, 所给积分与积分  $\iint_{x^2+y^2>1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p}$  同时收敛或同时发散. 由于  $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$  是正的, 从而引用

极坐标, 即可知所给积分当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

**解** 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$$

\* 区域  $\Omega$  的竭尽递增序列是指这样的序列  $\Omega_n$ , 对任意正整数  $n$  有  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ , 且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$ .



与积分  $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy$  同时收敛或同时发散. 由于  $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$  是正的, 故引用极坐标, 得

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{r}{r^{2p}} dr = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

由此可知, 原积分  $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$  当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

**【4162】**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

解 由于被积函数是正的, 并且关于  $Ox$  轴和  $Oy$  轴都对称, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+x^p)(1+y^q)} = 4 \left( \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} \right) \left( \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} \right).$$

由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{1}{1+x^p} = 1$ , 故积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}$  当  $p > 1$  时收敛,  $p < 1$  时发散,  $p = 1$  时显然也发散 ( $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$ ).

因此,  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \begin{cases} \text{有限数}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$

同理有  $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} = \begin{cases} \text{有限数}, & q > 1, \\ +\infty, & q \leq 1. \end{cases}$

由此可知,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$  仅当  $p > 1$  且  $q > 1$  时收敛, 其他情形均发散.

**【4163】**  $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy.$

解 仿 4161 题, 可知积分  $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$  与积分  $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$  同时收敛或同时发散.

由于被积函数是正的, 故

$$\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} = 2 \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}.$$

由于, 当  $0 \leq y \leq 1$  时, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p \geq 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p < 0),$$

故  $2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (p \geq 0),$

若  $p < 0$ , 则有相反的不等式.

对于  $a > 0$ , 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \frac{1}{(a^2+x^2)^p} = 1,$

故积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^p}$  当  $p > \frac{1}{2}$  时收敛,  $p < \frac{1}{2}$  时发散. 实际上, 此积分当  $p = \frac{1}{2}$  时也发散, 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) \Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

由此可知: 积分  $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ , 从而, 积分  $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$  当  $p > \frac{1}{2}$  时收敛, 当  $p \leq \frac{1}{2}$  时发散.

**【4164】**  $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} = 4 \iint_{\substack{x\geq 0, y\geq 0 \\ x+y\geq 1}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p + y^q},$$

其中  $\Omega_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1, x^p + y^q \leq 2\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1, x^p + y^q \geq 2\}$ , 令  $\Omega_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \geq 2\}$ , 易知, 当  $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \geq 2$  时必有  $x+y \geq 1$  (因若  $x+y < 1$ , 则必有  $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ , 从而,  $0 \leq x^p < 1, 0 \leq y^q < 1$ , 这就会得出  $x^p + y^q < 2$ ), 故  $\Omega_2 = \Omega_3$ . 由于  $\Omega_1$  是有界闭区域, 故(1)式右端第一个积分为常义积分, 因此, 广义积分

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分  $\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q}$  的敛散性, 在此积分中作变量代换  $x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta$ ,

$$\text{则易知} \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr.$$

由 3856 题的结果知, 右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为  $\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$ ; 而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr$$

当  $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 < -1$  (即  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ ) 时收敛, 当  $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \geq -1$  (即  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ) 时发散.

综上所述, 可知广义积分  $\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$  仅当  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$  时收敛.

$$\text{【4165】} \quad \iint_{x+y\geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$$

解 设此积分收敛, 以  $I$  表其值. 先设  $p < 1$ . 令

$$\Omega_n = \{(x, y) | 1 \leq x+y \leq 2n\pi, -2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

$$\Omega'_n = \{(x, y) | 1 \leq x+y \leq 2n\pi - \frac{\pi}{4}, -2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

$$\omega_n = \{(x, y) | 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x+y \leq 2n\pi, -2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

其中  $n=1, 2, 3, \dots$ , 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = I, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = I.$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy - \iint_{\Omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \right] = I - I = 0. \quad (1)$$

由于  $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ , 今在(1)式左端的积分中作变量代换  $x+y=u, x-y=v$  (即

$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ ), 并注意到  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -\frac{1}{2}$ , 得

$$\iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = \frac{1}{4} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} du \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos v - \cos u}{u^p} dv = -n\pi \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du;$$

而

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{du}{u^p} \geq \begin{cases} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p}, & p > 0, \\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, & p \leq 0, \end{cases}$$

由此可知(注意前面假定  $p < 1$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty$ ,

此显然与(1)式矛盾.

现设  $p \geq 1$ . 令

$$\omega'_n = \{(x, y) | 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x+y \leq 2n\pi, -2\pi n^{p-2} \leq x-y \leq 2\pi n^{p-2}\},$$

仿上, 应有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = 0. \quad (2)$$

但另一方面, 和上面一样, 作代换  $x+y=u, x-y=v$  后, 有

$$\iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\pi n^{(p-1)/2} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du.$$

同样, 由

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与(2)式矛盾.

综上所述, 可知: 不论  $p$  为何值, 积分  $\iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy$  都发散.

**【4166】** 证明: 若连续函数  $f(x, y)$  不为负及  $S_n (n=1, 2, \dots)$  为有界闭区域, 并且组成区域  $S$  的任意一个竭尽递增序列, 则

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

**证** 取定一有界闭区域的序列  $S'_n (n=1, 2, \dots)$ ,  $S'_1 \subset S'_2 \subset \dots \subset S'_n \subset \dots \subset S$ , 且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S'_n = S$  由于  $f(x, y)$  在  $S$  上非负, 故积分序列  $\iint_{S'_n} f(x, y) dx dy$  是递增的, 从而, 极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

存在(是有限数或是  $+\infty$ ), 我们要证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy = I$ . (2)

先设  $I$  为有限数. 任给  $\epsilon > 0$ , 由(1)式知, 存在  $N$ , 使当  $n \geq N$  时, 恒有

$$I - \epsilon < \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy < I + \epsilon. \quad (3)$$

又存在  $n_0$ , 使当  $n \geq n_0$  时,  $S_n \supset S'_N$ . 从而, 根据  $f(x, y)$  的非负性以及(3)式, 得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S'_N} f(x, y) dx dy > I - \epsilon.$$

另一方面, 对每个固定的  $n \geq n_0$  又必存在某个充分大的  $k_n (\geq N)$  使  $S'_{k_n} \supset S_n$ . 于是, 再由(3)式得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{S'_{k_n}} f(x, y) dx dy < I + \epsilon.$$



由此可知,当  $n \geq n_0$  时,恒有

$$I - \epsilon < \iint_{S_n} f(x, y) dx dy < I + \epsilon,$$

故(2)式成立.

次设  $I = +\infty$ . 任给  $M > 0$ , 由(1)式知, 存在  $N_1$ , 使

$$\iint_{S_{N_1}} f(x, y) dx dy > M.$$

又存在  $n_1$ , 使当  $n \geq n_1$  时, 恒有  $S_n \supset S_{N_1}'$ . 从而, 此时有

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S_{N_1}'} f(x, y) dx dy > M.$$

故(2)式成立. 证毕.

**【4167】** 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq n \\ x, y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

然而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 2n\pi \\ x^2-y^2 \leq 2n\pi}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0 \quad (n \text{ 为正整数}).$$

证 利用极坐标, 我们有

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 2n\pi \\ x^2-y^2 \leq 2n\pi}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2n\pi}} r \sin r^2 dr = \pi(1 - \cos 2n\pi) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 2n\pi \\ x^2-y^2 \leq 2n\pi}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0.$$

但由对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= 4 \iint_{\substack{0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^n dy \int_0^n (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx \\ &= 4 \left( \int_0^n \cos y^2 dy \right) \left( \int_0^n \sin x^2 dx \right) + 4 \left( \int_0^n \cos x^2 dx \right) \left( \int_0^n \sin y^2 dy \right) = 8 \left( \int_0^n \cos x^2 dx \right) \left( \int_0^n \sin x^2 dx \right). \end{aligned}$$

根据 3830 题的结果, 可知

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \sin x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

**【4168】** 证明: 尽管累次积分

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{及} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

收敛, 但积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛. 我们有

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \int_1^\infty \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} - \int_1^\infty \frac{y}{2} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=\infty} - \int_1^\infty \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)} + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=\infty} - \int_1^\infty \frac{dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \left( \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy - \frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

故

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = - \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{\pi}{4};$$

同理(利用已算得的结果)

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = - \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = - \int_1^{+\infty} \left( -\frac{1}{y^2 + 1} \right) dy = \frac{\pi}{4},$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad (1)$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint_{x \geq 1, 1 \leq y \leq x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad (2)$$

发散即可(因为如果积分(1)收敛, 则绝对值积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \quad (3)$$

必收敛, 从而, 在小一点的区域上的积分

$$\iint_{x \geq 1, 1 \leq y \leq x} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy$$

更收敛. 由此可知, 积分(2)收敛). 由于

$$I_n = \iint_{\substack{1 \leq x \leq n \\ 1 \leq y \leq n}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_1^n dx \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy,$$

仿上, 利用部分积分法, 容易算得

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= -\frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)} + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } I_n = \int_1^n \left( -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{\pi}{4} - \arctan n + \frac{1}{2} \ln n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

由此可知积分(2)发散.

注意, 也可用反证法证明积分(1)发散. 假定积分(1)收敛, 于是, 积分(3)收敛, 但恒有

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dy = \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx, \quad (4)$$

故(4)式中两个累次积分都收敛. 又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{与} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

都收敛, 故知

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4},$$

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

这是不可能的. 证毕.

计算下列积分(参数是正的):

$$\text{【4169】} \quad \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}.$$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}.$$

而当  $q > 1$  时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = \frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

(注意, 当  $q \leq 1$  时, 此积分发散, 从而,  $I = +\infty$ ); 又当  $p > q$  时,

$$I = \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} x^{q-p-1} dx = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意, 当  $p \leq q$  时, 此积分发散,  $I = +\infty$ )

综上所述, 可知: 当  $p > q > 1$  时,  $\iint_{\substack{x \geq 1 \\ y \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$

**【4170】**  $\iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$

解 由于被积函数非负, 故  $I = \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p} = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}.$

当  $p > 1$  时,  $\int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p} = -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(x+y)^{p-1}} \Big|_{y=1-x}^{y=+\infty} = \frac{1}{p-1}.$

(注意, 当  $p \leq 1$  时, 积分发散,  $I = +\infty$ ), 故

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad (p > 1).$$

**【4171】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi (-\sqrt{1-r^2}) \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi.$$

**【4172】**  $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p}.$

提示 注意到被积函数非负, 采用极坐标即可获解.

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

**【4173】**  $\iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2}.$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2} = 2 \int_0^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2}.$$

由于  $\int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2} = \frac{1}{x^2} \arctan \frac{y}{x^2} \Big|_{y=x^2+1}^{y=+\infty} = \frac{1}{x^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right],$

故

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] dx \\ &= -\frac{2}{x} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3}}{1 + \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其中  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2}{x^3}}{1 + \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \left( -\frac{x}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \right) = 0.$



下面计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}$ . 为简单计, 记  $a = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (\sqrt{2}-1)x^2} = \frac{1}{(x^2+b)^2 - (ax)^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)} = \frac{1}{2ab} \left[ \frac{x+a}{x^2+ax+b} - \frac{x-a}{x^2-ax+b} \right] \\ &= \frac{1}{4ab} \left[ \frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \frac{a}{x^2+ax+b} - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} + \frac{a}{x^2-ax+b} \right]. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{4ab} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2x+a}{x^2+ax+b} - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} \right] dx + \frac{1}{4b} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{x^2+ax+b} + \frac{1}{x^2-ax+b} \right] dx \\ &= \frac{1}{4ab} \left( \ln \frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b} \right) \Big|_{x=0}^{+\infty} + \frac{1}{4b} \left( \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \arctan \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} + \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \arctan \frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}} \right) \Big|_{x=0}^{+\infty} \\ &= 0 + \frac{1}{4b} \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}} \\ &= \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}+1} \sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2}-1} \sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2}. \end{aligned}$$

故

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} = \pi \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

**【4174】**  $\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$

解 由于被积函数非负, 故

$$\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

变换为极坐标, 计算下列积分:

**【4175】**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$

提示 注意到被积函数非负, 采用极坐标即可获解.

解 由于被积函数非负, 故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{+\infty} = \pi.$$

**【4176】**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$

提示 由于  $|e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)}$ , 利用 4175 题的结果知所给积分收敛, 对它采用极坐标即可获解.

解 由于  $|e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)}$ , 而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

收敛(参看 4175 题), 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy$$

收敛, 从而, 采用极坐标就有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \cos r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt \\ &= \pi \left( \frac{\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**【4177】**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$

提示 仿 4176 题的解法.

解 由于  $|e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)}$ , 而积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  收敛 (参看 4175 题), 故积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy$  收敛. 从而, 采用极坐标就有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \sin r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt \\ &= \pi \left( \frac{-\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

计算下列积分:

**【4178】**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy$ , 其中  $a < 0, ac-b^2 > 0$ .

解 我们有 (令  $\delta = ac - b^2 > 0, t = x + \frac{b}{a}y$ )

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left( x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2 \right) + \frac{ac-b^2}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f = at^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2d \left( t - \frac{b}{a}y \right) + 2ey + f \\ &= a \left( t^2 + \frac{2d}{a}t + \frac{d^2}{a^2} \right) - \frac{d^2}{a} + \frac{\delta}{a} \left[ y^2 + \frac{2}{\delta}(ae-bd)y + \frac{(ae-bd)^2}{\delta^2} \right] - \frac{(ae-bd)^2}{a\delta} + f \\ &= a \left( t + \frac{d}{a} \right)^2 + \frac{\delta}{a} \left( y + \frac{ae-bd}{\delta} \right)^2 + \beta. \end{aligned}$$

其中  $\beta = f - \frac{d^2}{a} - \frac{(ae-bd)^2}{a\delta} = \frac{1}{a\delta} [af(ac-b^2) - d^2(ac-b^2) - (ae-bd)^2]$

$$= \frac{1}{\delta} (acf - b^2f - cd^2 - ae^2 + 2bde) = \frac{\Delta}{\delta},$$

这里

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u = \sqrt{-a}x + \frac{b}{a}\sqrt{-a}y + \frac{d}{a}\sqrt{-a} \\ v = \sqrt{-\frac{\delta}{a}}y + \sqrt{-\frac{\delta}{a}}\frac{ae-bd}{\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

则  $\varphi(x, y) = -u^2 - v^2 + \beta$ . 又

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \sqrt{-a} & \frac{b}{a}\sqrt{-a} \\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} > 0.$$

故线性变换 (1) 是非退化的, 它将  $(x, y)$  平面的点与  $(u, v)$  平面的点一一对应. 于是, 利用 4175 题的结果, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(x,y)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} \frac{1}{\sqrt{\delta}} du dv = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\delta}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\delta}{4}}.$$

【4179】 
$$\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

提示 注意到被积函数非负,采用广义极坐标  $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$  即可获解.

解 作广义极坐标变换  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ , 由于被积函数非负,故

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} ab r e^{-r^2} dr = 2\pi ab \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=1}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{e} ab.$$

【4180】 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\epsilon \frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |\epsilon| < 1).$$

解 作广义极坐标变换  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ , 则有

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\epsilon \frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a^2 b^2 r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr d\theta. \quad (1)$$

由于  $|r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)}| \leq r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)}$ , 而积分

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)} dr = 2\pi \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)} dr < +\infty,$$

故(1)式中的二重广义积分收敛. 于是,

$$I = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr. \quad (2)$$

但是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt = -\frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)} \left[ t e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt \right] \\ &= \frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt = \frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)^2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\epsilon \sin 2\theta)^2} d\theta = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\epsilon \sin 2\theta)^2} d\theta = \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du \\ &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du \right] \\ &= \frac{1}{2} a^2 b^2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1+\epsilon \sin u)^2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u du}{(1-\epsilon \sin u)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

但是(作代换  $u = \frac{\pi}{2} - v$ ),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1+\epsilon \sin u)^2} = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{1+\epsilon \sin u} - \frac{1}{(1+\epsilon \sin u)^2} \right] du = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{1+\epsilon \cos v} - \frac{1}{(1+\epsilon \cos v)^2} \right] dv,$$

同理,有 
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u du}{(1-\epsilon \sin u)^2} = -\frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{1-\epsilon \cos v} - \frac{1}{(1-\epsilon \cos v)^2} \right] dv.$$

根据 2028 题(1)和 2063 题的结果,可知(当  $0 < |\epsilon| < 1$  时)

$$\int \frac{dx}{1+\epsilon \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + C, \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(1+\epsilon \cos x)^2} = -\frac{\epsilon \sin x}{(1-\epsilon^2)(1+\epsilon \cos x)} + \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + C. \quad (5)$$

(注意,2028 题(1)和 2063 题中假定  $0 < \epsilon < 1$ ,但从其推导过程可以看出公式(4)、(5)当  $-1 < \epsilon < 0$  时也成立).

于是,



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1+\epsilon \sin u)^2} = \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} - \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1-\epsilon \sin u)^2} = -\frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} - \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} - \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right].$$

从而,由(3)式得  $I = \frac{1}{\epsilon} a^2 b^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \left[ \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} + \arctan \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right],$

但对任何的  $x > 0$ , 有  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$

故最后得  $I = \frac{1}{\epsilon} a^2 b^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi \epsilon a^2 b^2}{2(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$

研究下列不连续函数的二重广义积分的收敛性 ( $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$ ):

【4181】  $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ , 式中区域  $\Omega$  由条件  $|y| \leq x^2; x^2 + y^2 \leq 1$  确定.

解 显然,  $\Omega$  为图 8.61 中的阴影部分. 由于对称性以及被积函数的非负性, 采用极坐标就有

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = 4 \int_0^{\delta} d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^1 \frac{dr}{r} = 4 \int_0^{\delta} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta,$$

其中  $\delta$  表图 8.61 中射线  $OA$  与  $Ox$  轴之间的夹角, 抛物线  $y = x^2$  的极坐标方程为  $r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}.$

由于

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left[ \left( \frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \theta \cdot \frac{\ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}}{\left( \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0,$$

故积分  $\int_0^{\delta} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta$  收敛, 从而, 原积分  $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$  收敛.

【4182】  $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy.$

解 由于  $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 > 0$  (当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时),

故  $\frac{m}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2 + xy + y^2)^p}$  (当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时),

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + xy + y^2} dx dy \quad \text{与积分} \quad \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于  $\frac{1}{(x^2 + xy + y^2)^p} > 0$  (当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时), 采用极坐标即得

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^p} \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^p}$  为常义积分, 其值为有限数, 而

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-p)}, & p < 1; \\ +\infty, & p \geq 1. \end{cases}$$

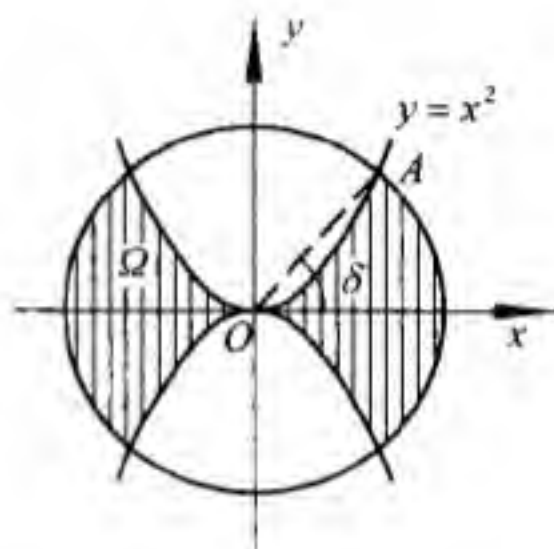


图 8.61

由此可知:原积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy$  当  $p < 1$  时收敛, 当  $p \geq 1$  时发散.

**【4183】**  $\iint_{x+y \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} = 4 \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p + y^q}, \quad (1)$$

其中  $\Omega_1 = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, x^p + y^q \geq 2^{-p-q}\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$ . 令  $\Omega_3 = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$ . 易知, 当  $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}$  时, 必有  $x+y \leq 1$

(因为  $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq \frac{1}{2^{p+q}}$ , 故  $x^p \leq \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^p}, y^q \leq \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^q}$ , 从而  $x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}$ , 由此知  $x+y \leq 1$ ).

故  $\Omega_3 = \Omega_2$ . 由于函数  $\frac{1}{x^p + y^q}$  在有界闭区域  $\Omega_1$  上连续, 故(1)式右端第一个积分为常义积分. 因此, 广义积分

$\iint_{x+y \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$  的敛散性取决于广义积分  $\iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q}$  的敛散性. 在此积分中作变量代换

$$x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, \quad y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} dr.$$

由 3856 题的结果知, 右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为  $\frac{1}{2} B(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$ ; 而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} dr$$

当  $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 > -1$  (即  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ ) 时收敛, 当  $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \leq -1$  (即  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ ) 时发散.

综上所述, 可知原积分  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$  当  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  时收敛, 当  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$  时发散.

**【4184】**  $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p} dx dy.$

解 由于  $\frac{m}{|x-y|^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p} \leq \frac{M}{|x-y|^p}$ , 并注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知

$$\text{积分 } \int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p} dx dy \quad \text{与积分 } \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$$

同时收敛或同时发散. 由对称性及被积函数的非负性可知,

$$\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p} = 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p}. \quad (1)$$

当  $p < 1$  时,

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \int_0^a \frac{x^{1-p}}{1-p} dx = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

从而, 由(1)式知  $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p} = \frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}$ . 因此, 当  $p < 1$  时积分  $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$  收敛.

现设  $p \geq 1$ . 首先, 我们有

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p}. \quad (2)$$

若  $p=1$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{x-y} = \int_{\epsilon}^a (\ln x - \ln \epsilon) dx \\ &= a \ln a - a + \epsilon - a \ln \epsilon, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (a \ln a - a + \epsilon - a \ln \epsilon) = +\infty.$$

由此可知, 此时  $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$  发散; 若  $p=2$ , 则

$$\iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{(x-y)^2} = \int_{\epsilon}^a \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{a}{\epsilon} - 1 - \ln a + \ln \epsilon,$$

故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \frac{a + \epsilon \ln \epsilon}{\epsilon} - 1 - \ln a \right) = +\infty.$$

由此可知, 此时积分  $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$  发散; 最后, 若  $p > 1, p \neq 2$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{(x-y)^p} = \frac{1}{p-1} \int_{\epsilon}^a (\epsilon^{1-p} - x^{1-p}) dx \\ &= \frac{1}{(p-1)\epsilon^{p-1}} \left( a - \frac{p-1}{p-2} \epsilon \right) + \frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}. \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = +\infty.$$

由此可知, 此时积分  $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$  发散.

综上所述, 可知积分  $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$  当  $p < 1$  时收敛,  $p \geq 1$  时发散.

**【4185】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy.$

解 由于  $\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知

积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy$  与积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p}$

同时收敛或同时发散. 采用极坐标, 由于被积函数  $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$  是正的, 故

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^p} dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}.$$

由于

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^p \frac{r}{(1-r)^p (1+r)^p} = 2^{-p},$$

故积分  $\int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}$  当  $p < 1$  时收敛,  $p > 1$  时发散; 当  $p=1$  时, 有

$$\int_0^1 \frac{r dr}{1-r^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-r^2) \Big|_0^1 = +\infty,$$

故积分也发散. 由此可知, 积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy$  当  $p < 1$  时收敛; 当  $p \geq 1$  时发散.

**【4186】** 证明: 若 1) 函数  $\varphi(x,y)$  在有界区域  $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$  内连续; 2) 函数  $f(x)$  在闭区间  $a \leq x \leq$



$A$  上连续; 3)  $p < 1$ , 则积分  $\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$  收敛.

证 首先注意, 由于  $p < 1$ , 故积分  $\int_b^B \frac{dy}{|f(x) - y|^p}$  对每个固定的  $x \in [a, A]$  恒收敛, (若  $f(x) \in [b, B]$  此为瑕积分, 点  $f(x)$  是瑕点, 由于  $p < 1$ , 它收敛; 若  $f(x) \notin [b, B]$ , 则为常义积分, 当然收敛). 再根据  $\varphi(x, y)$  的有界性, 即知: 对每个固定的  $x \in [a, A]$ , 积分  $\int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$  都收敛. 令

$$F(x) = \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy \quad (a \leq x \leq A).$$

下面我们证明  $F(x)$  是  $a \leq x \leq A$  上的连续函数. 若已获证, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy = \int_a^A F(x) dx$$

显然是收敛的 (右端为常义积分), 于是本题获证. 令  $c = \max_{a \leq x \leq A} |f(x)|$ . 今将函数  $\varphi(x, y)$  连续地延拓到有界闭矩形  $R(a \leq x \leq A, b - 2c \leq y \leq B + 2c)$  上 (只要规定

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, B), & a \leq x \leq A, B < y \leq B + 2c, \\ \varphi(x, b), & a \leq x \leq A, b - 2c \leq y < b \end{cases}$$

即可). 延拓后的函数仍记为  $\varphi(x, y)$ . 由于  $\varphi(x, y)$  及  $|f(x) - y|^{1-p}$  都在  $R$  上连续, 故有界且一致连续; 存在常数  $M$ , 使对一切  $(x, y) \in R$ , 有

$$|\varphi(x, y)| \leq M, \quad |f(x) - y|^{1-p} \leq M. \quad (1)$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_1 > 0$  (取  $\delta_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$ ), 使当  $|x_1 - x_2| < \delta_1, |y_1 - y_2| < \delta_1 ((x_1, y_1) \in R, (x_2, y_2) \in R)$  时, 恒有

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| < \varepsilon, \quad (2)$$

$$\left| |f(x_1) - y_1|^{1-p} - |f(x_2) - y_2|^{1-p} \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

又由  $f(x)$  在  $[a, A]$  上的一致连续性可知, 存在  $\delta_2 > 0$ , 使当  $|x_1 - x_2| < \delta_2 (x_1, x_2 \in [a, A])$ , 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1. \quad (4)$$

令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . 于是, 由 (2) 式可知: 当  $|x_1 - x_2| < \delta (x_1, x_2 \in [a, A])$  时, 对一切  $b - c \leq y \leq B + c$ , 恒有

$$|\varphi(x_1, y + f(x_1)) - \varphi(x_2, y + f(x_2))| < \varepsilon. \quad (5)$$

现设  $|x_1 - x_2| < \delta, (x_1, x_2 \in [a, A])$ . 不失一般性, 设  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 我们有

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \int_b^B \frac{\varphi(x_1, y)}{|f(x_1) - y|^p} dy - \int_b^B \frac{\varphi(x_2, y)}{|f(x_2) - y|^p} dy \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du - \int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1)) - \varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du - \int_{B-f(x_2)}^{B-f(x_1)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du \\ &\quad + \int_{b-f(x_2)}^{b-f(x_1)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du \\ &= I_1 - I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $I_1, I_2, I_3$  分别表上式中的三个积分. 易知 ( $p < 1$ )

$$\int_a^b \frac{du}{|u|^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} - a^{1-p}], & 0 \leq a \leq \beta, \\ \frac{1}{1-p} [(-a)^{1-p} - (-\beta)^{1-p}], & a \leq \beta \leq 0, \\ \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} + (-a)^{1-p}], & a < 0 < \beta. \end{cases}$$

从而, 在任何情形下均有

$$\int_a^b \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{1}{1-p} (|\beta|^{1-p} + |\alpha|^{1-p}); \quad (7)$$

而当  $\alpha, \beta$  同号时, 有

$$\int_a^b \frac{du}{|u|^p} = \frac{1}{1-p} \left| |\beta|^{1-p} - |\alpha|^{1-p} \right|. \quad (8)$$

于是, 由(5)式、(1)式及(7)式, 得

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_{h-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{\varepsilon}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |h-f(x_1)|^{1-p}) \leq \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \quad (9)$$

下面估计  $I_2$ : 若  $B-f(x_2)$  与  $B-f(x_1)$  同号, 则由(1)式、(8)式及(3)式, 有

$$|I_2| \leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} = \frac{M}{1-p} \left| |B-f(x_2)|^{1-p} - |B-f(x_1)|^{1-p} \right| < \frac{M\varepsilon}{1-p};$$

若  $B-f(x_2)$  与  $B-f(x_1)$  异号, 即  $B-f(x_1) < 0 < B-f(x_2)$ . 由于  $[B-f(x_2)] - [B-f(x_1)] = f(x_1) - f(x_2) < \delta_1$ , 故有  $|B-f(x_1)| < \delta_1, |B-f(x_2)| < \delta_1$ . 于是, 由(7)式并注意到  $\delta_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$ , 即得

$$|I_2| \leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{M}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |B-f(x_1)|^{1-p}) < \frac{M}{1-p} (\delta_1^{1-p} + \delta_1^{1-p}) < \frac{M\varepsilon}{1-p}.$$

所以, 在任何情况下均有

$$|I_2| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \quad (10)$$

同理, 可得(在任何情况下)

$$|I_3| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \quad (11)$$

于是, 由(6)式、(9)式、(10)式及(11)式, 即得

$$|F(x_1) - F(x_2)| < |I_1| + |I_2| + |I_3| < \frac{4M\varepsilon}{1-p}.$$

由此可知,  $F(x)$  在  $a \leq x \leq A$  上(一致)连续, 证毕.

计算下列积分:

**【4187】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr = -2\pi \int_0^1 r \ln r dr = -2\pi \left( \frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr \right) = \frac{\pi}{2}.$$

**【4188】**  $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$

解  $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx.$

作变量代换  $x = au$ , 则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx = 2a \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du = 2a B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2a \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = 2a \cdot \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi a.$$

**【4189】**  $\iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy$ , 其中区域  $\Omega$  是由直线  $y=0, y=x, x=\pi$  围成的.

解 作变量代换  $x=u+v, y=u-v$ , 则  $Oxy$  平面上的区域  $\Omega$  变为  $uv$  平面上的区域  $\Omega'$ . 显然  $\Omega'$  由直线  $u=v, v=0, u+v=\pi$  所界. 又有  $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -2$ . 于是, 再注意到被积函数非正, 即有

$$\iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy = 2 \iint_{\Omega'} \ln \sin 2v du dv = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_v^{\pi-v} \ln \sin 2v du$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin 2v dv = 2 \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \cos v dv \\
&= \pi^2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2v \ln \sin v dv = \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v dv \\
&= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \left( -\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

\* ) 利用 2353 题(1)的结果.

**【4190】**  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

提示 由关于  $Ox$  轴的对称性与被积函数的非负性,采用极坐标即可获解.

解 由关于  $Ox$  轴的对称性与被积函数的非负性,采用极坐标,有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2.$$

研究下列三重积分的收敛性:

**【4191】**  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$ , 其中  $0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M$ .

解题思路 仿 4161 题, 所给积分与积分  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$  同时收敛或同时发散, 注意到

$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$  是正的, 采用球坐标  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$ , 即可知当  $p > \frac{3}{2}$  时收敛, 当  $p \leq \frac{3}{2}$  时发散.

解 由于  $\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知

$$\text{积分 } \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz \text{ 与 积分 } \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于被积函数  $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$  是正的, 采用球坐标  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$ , 得

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p+2}} = 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p+2}}.$$

显然,  $\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p+2}}$  当  $p > \frac{3}{2}$  时收敛,  $p \leq \frac{3}{2}$  时发散; 由此可知,  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$  当  $p > \frac{3}{2}$  时收敛, 当  $p \leq \frac{3}{2}$  时发散.

**【4192】**  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$  其中  $0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M$ .

提示 仿 4191 题, 并采用球坐标.

解 和 4191 题完全类似(请参看 4191 题的解题过程), 易得

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p+2}} = 4\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p+2}}.$$

显然,  $\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p+2}}$  当  $p < \frac{3}{2}$  时收敛, 当  $p \geq \frac{3}{2}$  时发散; 故  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$  当  $p < \frac{3}{2}$  时收

敛, 当  $p \geq \frac{3}{2}$  时发散.



**【4193】** 
$$\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p>0, q>0, r>0).$$

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} = 8 \iiint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x+y+z>1}} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} = 8 \iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} + 8 \iiint_{\Omega_2} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}.$$

其中,令

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z>1, x^p + y^q + z^r \leq 3\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z>1, x^p + y^q + z^r > 3\}.$$

令  $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3\}$ , 由于当  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3$  时必有  $x+y+z>1$  (否则,  $x+y+z \leq 1$ , 就有  $x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1$ , 从而,  $x^p \leq 1, y^q \leq 1, z^r \leq 1$ , 于是  $x^p + y^q + z^r \leq 3$ ), 故  $\Omega_2 = \Omega_3$ . 显然,  $\iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$  为常义积分, 故积分  $\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$  的敛散性取决于  $\iiint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$

的敛散性. 对此积分, 作变量代换

$$x = R^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \cos^{\frac{2}{p}} \psi, \quad y = R^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \cos^{\frac{2}{q}} \psi, \quad z = R^{\frac{2}{r}} \sin^{\frac{2}{r}} \psi.$$

则易知

$$\frac{D(x, y, z)}{D(R, \varphi, \psi)} = \frac{8}{pqr} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 1} \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{r} - 1} \psi \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \psi.$$

于是, 由被积函数的非负性, 并利用 3856 题的结果, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} &= \frac{8}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{r} - 1} \psi \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \psi d\psi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi d\varphi \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\ &= \frac{8}{pqr} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\ &= \frac{2}{pqr} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR. \end{aligned}$$

由于积分  $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR$  当  $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 < -1$  (即  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ) 时收敛, 当  $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 \geq -1$  时发散, 故积分  $\iiint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$  (从而, 积分  $\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$ ) 当  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$  时收敛, 当  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$  时发散.

**【4194】** 
$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p},$$
 其中  $0 < m \leq |f(x, y, z)| \leq M$ , 而  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  是闭区间  $[0, a]$  上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \leq \frac{|f(x, y, z)|}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \leq \frac{M}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\begin{aligned} &\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \\ &\text{与积分} \quad \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \end{aligned}$$

同时收敛或同时发散. 由被积函数  $\frac{1}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$  的非负性, 我们有

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} = \int_0^a F(x) dx,$$

其中

$$F(x) = \int_0^a \int_0^a \frac{dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \quad (0 \leq x \leq a).$$

作变量代换

$$u=y-\varphi(x), \quad v=z-\psi(x) \quad (x \text{ 固定}),$$

则

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(y,z)}} = 1.$$

从而,有

$$F(x) = \iint_{\substack{-\varphi(x) \leq u \leq a-\varphi(x) \\ \psi(x) \leq v \leq a-\psi(x)}} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p}. \quad (1)$$

先设  $p < 1$ , 令  $c = \max_{0 \leq x \leq a} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$ , 则由(1)式知,

$$0 < F(x) \leq \iint_{\substack{-c \leq u \leq a-c \\ -c \leq v \leq a-c}} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p} < \iint_{u^2+v^2 \leq 2(a-c)^2} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}(a-c)} \frac{dr}{r^{2p-1}} = \frac{\pi}{1-p} [\sqrt{2}(a-c)]^{2-2p},$$

即  $F(x)$  有界(实际上,仿 4186 题的证明过程还可证明  $F(x)$  在  $0 \leq x \leq a$  上连续),从而,  $\int_0^a F(x) dx$  是常义积分,显然收敛.由此可知,此时积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y-\varphi(x)]^2 + [z-\psi(x)]^2\}^p} \quad (2)$$

收敛.

次设  $p \geq 1$ , 这时积分(2)可能收敛也可能发散,分两种情况讨论:

(i) 若不存在这样的  $x \in [0, a]$  使  $0 \leq \varphi(x) \leq a, 0 \leq \psi(x) \leq a$  同时成立(例如,  $\varphi(x)$  或  $\psi(x)$  的值完全位于  $[0, a]$  之外;这时,对一切  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ , 均有:连续函数  $\{[y-\varphi(x)]^2 + [z-\psi(x)]^2\}^p > 0$ . 从而,积分(2)收敛(这时是常义积分).

(ii) 若存在这样的点  $x \in [0, a]$  使  $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$  同时成立;由  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  的连续性,必存在正数  $\epsilon$  及闭区间  $I_0 \subset [0, a]$ , 使当  $x \in I_0$  时,恒有  $\epsilon \leq \varphi(x) \leq a-\epsilon, \epsilon \leq \psi(x) \leq a-\epsilon$ , 从而由(1)式知;当  $x \in I_0$  时,有

$$F(x) \geq \iint_{\substack{-\epsilon \leq u \leq \epsilon \\ \epsilon \leq v \leq a-\epsilon}} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p} \geq \iint_{u^2+v^2 \leq \epsilon^2} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\epsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}} = 2\pi \int_0^{\epsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}} = +\infty \quad (\text{注意 } p \geq 1),$$

即当  $x \in I_0$  时恒有  $F(x) = +\infty$ , 由此可知,积分  $\int_0^a F(x) dx$  发散. 于是,积分(2)发散.

综上所述,可知:积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x,y,z) dx dy dz}{\{[y-\varphi(x)]^2 + [z-\psi(x)]^2\}^p}$$

当  $p < 1$  时收敛;当  $p \geq 1$  时,若不存在  $x \in [0, a]$  使  $0 \leq \varphi(x) \leq a, 0 \leq \psi(x) \leq a$ , 则收敛;若存在  $x \in [0, a]$ , 使  $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$ , 则发散.

**【4195】** 
$$\iiint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}.$$

解 我们有(注意被积函数的非负性)

$$\begin{aligned} \iiint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p} &= 2 \iiint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \\ x+y-z \geq 0}} \frac{dx dy dz}{(x+y-z)^p} \\ &= 2 \iint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 1 \leq x+y \leq 2}} dx dy \int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p} + 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \geq 1}} dx dy \int_{-1}^1 \frac{dz}{(x+y-z)^p} = 2I_1 + 2I_2, \end{aligned}$$

其中  $I_1$  表第一个积分,  $I_2$  表第二个积分.

若  $p < 1$ , 则

$$\int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p} = \frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{(x+y-z)^p} = \frac{(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}}{1-p} \quad (x+y \geq 1),$$

故  $I_1 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{x \leq 1, y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1}} (x+y+1)^{1-p} dx dy,$

$$I_2 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \geq 1}} [(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}] dx dy.$$

显然,  $I_1$  与  $I_2$  均为常义(二重)积分, 当然收敛. 因此, 当  $p < 1$  时, 积分  $\iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$  收敛.

若  $p \geq 1$ , 则当  $x+y > -1$  时,  $\int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{|x+y-z|^p} = +\infty$ , 故  $I_1 = +\infty$ , 又显然有  $I_2 > 0$ , 故此时积分

$$\iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p} \text{ 发散.}$$

计算下列积分:

**【4196】**  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}.$

解 由于被积函数非负, 故

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \int_0^1 \frac{dy}{y^q} \int_0^1 \frac{dz}{z^r} = \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \quad (\text{若 } p < 1, q < 1, r < 1).$$

注意, 若  $p \geq 1$  或  $q \geq 1$  或  $r \geq 1$ , 则  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = +\infty.$

**【4197】**  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$

提示 注意到被积函数非负, 采用球坐标即可获解.

解 采用球坐标, 由于被积函数的非负性, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^4} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

**【4198】**  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$

解 采用球坐标, 由于被积函数的非负性, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr.$$

作代换  $t = r^2$ , 则当  $p < 1$  时, 有

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

从而, 当  $p < 1$  时, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

注意, 若  $p \geq 1$ , 则  $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt = +\infty$ , 故此时

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = +\infty.$$

**【4199】**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$

解 采用球坐标, 由被积函数的非负性, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2} dr = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2} dr.$$



作代换  $r^2 = t$ , 则  $\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ .

于是,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \pi^{\frac{3}{2}}$ .

【4200】 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中  $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) 为正定二次型.

解 用  $A$  表矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于二次型  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$  是正定的, 故由高等代数中关于二次型的理论知: 存在正交矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

使

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ ; 也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \\ x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \\ x_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{cases} \quad (3)$$

之下, 二次型  $P(x_1, x_2, x_3)$  化为平方和:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \quad (4)$$

注意, 由于  $B$  是正交矩阵, 故  $B^{-1} = B'$  ( $B'$  表  $B$  的转置矩阵), 从而,  $|B| = |b_{ij}| = \pm 1$ . 显然,

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x'_1, x'_2, x'_3)} = |b_{ij}| = \pm 1.$$

由(4)式, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx'_1 dx'_2 dx'_3. \quad (5)$$

再作变量代换  $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} u_1, x'_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} u_2, x'_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} u_3$ , 则  $\frac{D(x'_1, x'_2, x'_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}$ . 于是(注意 4199 题的结果),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} du_1 du_2 du_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}. \quad (6)$$

但由(2)式知(记  $\Delta = |a_{ij}| = |A|$ , 注意, 由于  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$  是正定的, 故  $\Delta > 0$ )

$$\Delta = |A| = |B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (7)$$

于是, 根据(5)、(6)、(7)诸式, 最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

## § 10. 多重积分

1° 多重积分的直接算法 若函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在由下列不等式确定的有界区域  $\Omega$  内是连续的:

$$\begin{cases} x_1' \leq x_1 \leq x_1'', \\ x_2'(x_1) \leq x_2 \leq x_2''(x_1) \\ \vdots \\ x_n'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq x_n''(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{cases}$$

其中  $x_1'$  和  $x_1''$  为常数,  $x_2'(x_1), x_2''(x_1), \dots, x_n'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n''(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  为连续函数, 则相应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\iiint_{\Omega} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_n'(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n.$$

2° 多重积分中的变量代换 若

1) 函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在有界可测区域  $\Omega$  内是一致连续的;

2) 连续可微函数  $x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) (i=1, 2, \dots, n)$ , 把  $Ox_1, x_2, \dots, x_n$  空间内的区域  $\Omega$  一一映射成  $O'\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  空间内的有界区域  $\Omega'$ ;

3) 在区域  $\Omega'$  内雅可比行列式  $I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \neq 0$ ,

则成立公式

$$\iiint_{\Omega} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \iiint_{\Omega'} \cdots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) |I| d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n.$$

特别是, 根据公式

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

变换成极坐标  $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  时, 有

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

**【4201】** 设  $K(x, y)$  为区域  $R[a \leq x \leq b, a \leq y \leq b]$  内的连续函数, 且

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

证

$$\begin{aligned} & K_{n+m+1}(x, y) \\ &= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, t) K(t, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_m, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n dt dz_1 dz_2 \cdots dz_m \\ &= \int_a^b \left\{ \left[ \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, t) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[ \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(t, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_m, y) dz_1 dz_2 \cdots dz_m \right] \right\} dt \\ &= \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt. \end{aligned}$$

**【4202】** 设  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为区域  $0 \leq x_i \leq x (i=1, 2, \dots, n)$  内的连续函数, 证明等式:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geq 2).$$

证 考虑下面三个有界闭区域:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq x, i=1, 2, \dots, n\},$$

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq x, 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_n \leq x, x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x\}.$$

由假定  $f(x_1, \dots, x_n)$  在区域  $\Omega$  上连续, 显然,  $\Omega_1 \subset \Omega, \Omega_2 \subset \Omega$ , 故  $f(x_1, \dots, x_n)$  在  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  上连续. 根据化  $n$  重积分为累次积分的公式, 我们有

$$\iint_{\Omega_1} \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n, \quad (1)$$

$$\iint_{\Omega_2} \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1. \quad (2)$$

下证  $\Omega_1 = \Omega_2$ , 事实上, 若  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$ , 则

$$0 \leq x_1 \leq x, 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}, \quad (3)$$

从而,

$$0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (4)$$

于是,

$$0 \leq x_n \leq x, x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (5)$$

由此可知  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$ . 反之, 若  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$ , 则 (5) 式成立. 从而, (4) 式显然成立, 由此又知 (3) 式成立, 故  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$ , 于是,  $\Omega_1 = \Omega_2$  获证. 由此, 再根据 (1) 式与 (2) 式, 即得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1.$$

证毕.

**【4203】** 证明:  $\int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^x f(\tau) d\tau \right\}^n$ , 其中  $f$  为连续函数.

提示 利用数学归纳法.

证 证法 1:

$$\begin{aligned} \text{我们有} \quad & \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\ &= \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n. \end{aligned}$$

令  $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$ . 由于  $f$  是连续函数, 故  $F'(s) = f(s)$ . 我们有 (注意到  $F(0) = 0$ )

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} = \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) F'(t_{n-1}) dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} [F(t_{n-1})]^2 \Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}} = \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2, \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2}) dt_{n-2} \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \int_0^{t_{n-3}} \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2 F'(t_{n-2}) dt_{n-2} \\ &= \frac{1}{3!} [F(t_{n-3})]^3, \end{aligned}$$

⋮

这样继续下去, 显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1}.$$

于是,  $\int_0^x f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1} f(t_1) dt_1$



$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t [F(t_1)]^{n-1} F'(t_1) dt_1 = \frac{1}{n!} [F(t)]^n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n.$$

从而, 
$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n.$$

证毕.

证法 2:

用数学归纳法证明所述公式. 当  $n=1$  时此公式显然成立. 今设  $n=k$  时公式成立, 要证  $n=k+1$  时公式也成立. 我们有

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} = \int_0^t f(t_1) \left[ \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \right] dt_1.$$

由于假定公式当  $n=k$  时成立, 故

$$\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} = \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k.$$

从而 (令  $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$ , 则  $F'(s) = f(s)$ ),

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} &= \int_0^t f(t_1) \cdot \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k dt_1 = \frac{1}{k!} \int_0^t [F(t_1)]^k F'(t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{(k+1)!} [F(t)]^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^{k+1}. \end{aligned}$$

因此, 所述公式当  $n=k+1$  时成立. 于是, 由数学归纳法知, 所述公式对一切正整数  $n$  均成立. 证毕.

计算下列多重积分:

**【4204】** (1)  $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$

(2)  $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

提示 (1) 化成累次积分即可获解;

(2) 将被积函数展开, 化成累次积分并利用本题(1)的结果.

解 (1) 
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_n \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left( x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \frac{1}{3} \right) dx_{n-1} \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left( x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) dx_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n + x_3 x_4 \\ &\quad + \cdots + x_3 x_n + \cdots + x_{n-1} x_n)] dx_n \\ &= \frac{n}{3} + 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1 x_2 + \cdots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n) + \cdots + x_{n-1} x_n] dx_n \\ &= \frac{n}{3} + 2 \left( \frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{4} + \cdots + \frac{1}{4} \right) = \frac{n(3n+1)}{12}. \end{aligned}$$

\* ) 利用本题(1)的结果.

**【4205】** 
$$I_n = \int_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0} \int_{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a} \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 解法 1:

化为累次积分,有  $I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n,$

我们又知

$$\begin{aligned} & \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n = \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} (a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} (a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})^2 \Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}} = \frac{1}{2} (a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2, \\ & \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n = \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} \frac{1}{2} (a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2 dx_{n-2} \\ &= \frac{1}{3!} (a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3, \\ & \vdots \end{aligned}$$

这样继续下去,显然有

$$\int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-x_1-x_2} dx_3 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n = \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1}.$$

于是,

$$I_n = \int_0^a \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1} dx_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

解法 2:

我们有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换:

$$x_1 = a\xi_1, x_2 = a\xi_2, \cdots, x_n = a\xi_n,$$

即得

$$I_n = a^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n = a^n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = a^n I_n(1),$$

其中  $I_n(1)$  表示当  $a=1$  时积分  $I_n$  的值.

另一方面,我们有

$$I_n(1) = \int_0^1 d\xi_n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} \leq 1-\xi_n}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} = I_{n-1}(1) \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式,可得

$$I_n(1) = \frac{1}{n!},$$

于是,最后得  $I_n = \frac{a^n}{n!}.$

**【4206】**  $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

提示 化成累次积分或利用 4203 题的结果,均可获解.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{2} x_1 x_2 \cdots x_{n-1}^2 dx_{n-1} \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x_1 x_2 \cdots x_{n-2}^3 dx_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 x_1^{2^{n-1}} dx_1 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2^n n!}. \end{aligned}$$

\* ) 也可利用 4203 题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^1 r dr \right)^n = \frac{1}{2^n n!}.$$

**【4207】**  $\int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

解 作代换

$$x_1 = u_1(1-u_2),$$

$$\begin{aligned}x_2 &= u_1 u_2 (1 - u_3) \\&\vdots \\x_{n-1} &= u_1 u_2 \cdots u_{n-1} (1 - u_n), \\x_n &= u_1 u_2 \cdots u_n,\end{aligned}$$

则由  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$  知  $0 \leq u_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n)$ , 且有

$$I = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & \cdots & u_2 u_3 \cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2 u_3 \cdots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \cdots & u_1 u_3 \cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1 u_3 \cdots u_n \\ 0 & -u_1 u_2 & & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_1 u_2 \cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1 \cdots u_{n-2} u_n \\ 0 & 0 & \cdots & -u_1 \cdots u_{n-1} & u_1 \cdots u_{n-1} \end{vmatrix}$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素, 则在对角线下面的全部元素都等于零, 而在对角线上的元素就等于  $1, u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \cdots u_{n-1}$ . 因此, 得

$$I = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1}.$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned}& \iiint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{n-1/2} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1} du_1 du_2 \cdots du_{n-1} du_n \\&= \frac{2}{(n-1)! (2n+1)}.\end{aligned}$$

**【4208】** 求以平面  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i (i=1, 2, \dots, n)$

为界的  $n$  维平行  $2n$  面体的体积, 这里设  $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$ .

解 令  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 即得  $2n$  面体的体积

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} \int_{-h_2}^{h_2} \cdots \int_{-h_n}^{h_n} \frac{1}{|\Delta|} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \frac{2^n h_1 \cdots h_n}{|\Delta|}.$$

**【4209】** 求  $n$  维角锥  $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n) (a_i > 0, i=1, 2, \dots, n)$  的体积.

提示 令  $x_i = a_i \xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 并利用 4205 题的结果.

解 令  $x_i = a_i \xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 即得体积

$$V = a_1 a_2 \cdots a_n \iiint_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}.*)$$

\* ) 利用 4205 题的结果.

**【4210】** 求以曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n$$

为界的  $n$  维圆锥的体积.

解 作代换

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 r \cos \varphi_1, \\x_2 &= a_2 r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\&\vdots \\x_{n-2} &= a_{n-2} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2}, \\x_{n-1} &= a_{n-1} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2}, \\x_n &= a_n x'_n,\end{aligned}$$

则域  $V$  为

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, \dots, 0 \leq \varphi_{n-3} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{n-2} \leq 2\pi, r \leq x'_n \leq 1,$$

并且

$$|I| = a_1 a_2 \cdots a_n r^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \sin^{n-4} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3}.$$



于是,所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= a_1 a_2 \cdots a_n \int_0^1 r^{n-2} dr \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} \int_r^1 dx'_n \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \cdot 1 \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
 &= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.
 \end{aligned}$$

\* ) 利用等式  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi$  ( $a > 0$ ), 即得

$$\int_0^\pi \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi.$$

\*\* ) 利用 3856 题的结果.

**【4211】** 求  $n$  维球体  $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$  的体积.

解 令  $x_i = a\xi_i$  ( $i=1, 2, \cdots, n$ ), 即得体积

$$V_n = \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = a^n V_n(1),$$

其中  $V_n(1)$  表示  $a=1$  时的  $n$  维球体的体积. 但是

$$\begin{aligned}
 V_n(1) &= \iiint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \int_{-1}^1 d\xi_n \iiint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} \\
 &= V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n = 2V_{n-1}(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi \\
 &= 2V_{n-1}(1) \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = V_{n-1}(1) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},
 \end{aligned}$$

因为  $V_1(1)=2$ , 故由上述循环公式可得  $V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$ .

因此, 所求的体积为

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^n.$$

对于  $n$  为偶数及奇数, 分别可得公式

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} a^{2m}, \quad V_{2m+1} = \frac{2 \cdot (2\pi)^m}{(2m+1)!!} a^{2m+1}.$$

特别是, 对于  $V_1, V_2, V_3$  可求得熟知的值:  $2a, \pi a^2, \frac{4}{3} \pi a^3$ .

【4212】 求  $\iiint_{\Omega} \cdots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ , 其中区域  $\Omega$  是由下列不等式确定的:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

提示 利用 4211 题的结果.

解  $\iiint_{\Omega} \cdots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_n^2 dx_n \cdot \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} a^{n-1}.$

\* ) 利用 4211 题的结果.

【4213】 计算

$$\iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}}.$$

提示 利用 4211 题的结果.

解  $\iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}}$   
 $= \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}} \frac{dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$   
 $= \pi \cdot \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} = \pi \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$

\* ) 利用 4211 题的结果.

【4214】 证明等式:  $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$

提示 利用 4202 题的结果.

证  $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$   
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_2}^x dx_1 = \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_3}^x (x-x_2) dx_2$   
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2} (x-x_3)^2 dx_3$   
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2 \cdot 3} (x-x_4)^3 dx_4$   
 $= \cdots$   
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!} (x-x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1} = \int_0^x \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n) dx_n.$

在上述积分中, 将  $x_n$  代之以  $u$ , 不影响积分的值, 故得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

\* ) 利用 4202 题的结果.

【4215】 证明等式:  $\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$

证 利用 4202 题的结果, 即得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x x_1 dx_1$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2} (x^2 - x_2^2) x_2 dx_2$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2^2 \cdot 2} (x^2 - x_3^2)^2 x_3 dx_3$$

=...

$$= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} (x^2 - x_n^2)^{n-1} x_n dx_n = \int_0^x \frac{1}{2^n n!} f(x_{n+1}) (x^2 - x_{n+1}^2)^n dx_{n+1}.$$

在上述积分中,将  $x_{n+1}$  代之以  $u$ ,不影响积分的值,故得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_{x_1}^x x_2 dx_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^x f(x_n) dx_n = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

**【4216】** 证明狄利克雷公式:

$$\int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)} \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0).$$

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当  $n=1$  时,公式显然成立,即  $\int_{0 \leq x_1 \leq 1} x_1^{p_1-1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$

其次,设公式对  $n-1$  成立,今证公式对  $n$  也成立.为此,将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1} dx_n \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1-x_n}} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

在里面的  $n-1$  重积分中作代换

$$x_1 = (1-x_n)\xi_1, x_2 = (1-x_n)\xi_2, \dots, x_{n-1} = (1-x_n)\xi_{n-1},$$

即得

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)} \int_0^1 x_n^{p_n-1} (1-x_n)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)} B(p_n, p_1+\cdots+p_{n-1}+1) \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)} \cdot \frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}. \end{aligned}$$

这样一来,我们得知公式对  $n$  重积分也正确.从而,对  $n$  为任意的正整数时,狄利克雷公式均成立.

**【4217】** 证明刘维耳公式:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \cdots \int f(x_1+x_2+\cdots+x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0), \end{aligned}$$

式中  $f(u)$  为连续函数.

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当  $n=1$  时,公式显然成立.当  $n=2$  时,公式也成立,即

$$\int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1}} f(x_1+x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du.$$

事实上,令  $\Omega$  表区域:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2 \leq 1$ . 作代换  $x_1 = \xi_1, x_1+x_2 = \xi_2$ , 及  $t = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ ,

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad & \int_{\Omega} f(x_1+x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 = \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1^{p_1-1} (\xi_2 - \xi_1)^{p_2-1} d\xi_1 \\ &= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^1 t^{p_1-1} (1-t)^{p_2-1} \xi_2^{p_1+p_2-1} dt = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(\xi_2) \xi_2^{p_1+p_2-1} d\xi_2 \end{aligned}$$



$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du.$$

其次, 设公式对于  $n-1$  成立, 今证对于  $n$  公式也成立. 为此, 将公式左端写为

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \int_0^{1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}} f(x_1+x_2+\cdots+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n.$$

令

$$\phi(t) = \int_0^{1-t} f(t+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n$$

代入上式, 并利用公式对  $n-1$  成立的假定, 得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \int_0^1 \phi(t) t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} dt.$$

利用上面已证的  $n=2$  时的公式, 于是即得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1+x_2+\cdots+x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} f(t+x_n) t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \int_0^1 \int_0^{1-t} f(t+x_n) t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dt dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \cdot \frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du, \end{aligned}$$

即公式对于  $n$  成立. 从而, 公式对于  $n$  为任意正整数均成立.

**【4218】** 将区域  $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq R^2$  上的  $n$  重积分 ( $n \geq 2$ )

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

化为一重积分, 其中  $f(u)$  为连续函数.

**解** 作代换

$$\begin{aligned} x_1 &= Rr \cos \varphi, \\ x_2 &= Rr \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \\ I &= R^n r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}, \end{aligned}$$

则有

于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= R^n \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \\ &= 2\pi R^n \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \\ &= R^n \frac{2\pi \cdot \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 (r^2)^{\frac{n}{2}-1} f(Rr) d(r^2) \\ &= R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} f(R\sqrt{u}) du. \end{aligned}$$

\* ) 参看 4210 题的计算过程.

【4219】 计算半径为  $R$ , 密度为  $\rho_0$  的均质球对自身的引力势, 即求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} \iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

式中  $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .

解 我们有 
$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} dx_1 dy_1 dz_1 \iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}.$$

由 4155 题的结果可知

$$\iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}} = 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中  $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ . 于是(利用球坐标),

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2\right) dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{\rho_0}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^R \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2\right) r^2 dr \\ &= \frac{16}{15}\pi^2 \rho_0^2 R^5. \end{aligned}$$

【4220】 设  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) 为正定二次型, 计算  $n$  重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c\right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i = y_i + a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad (1)$$

其中诸常数  $a_i$  以下再确定. 于是, 易得(注意到  $a_{ij} = a_{ji}$ )

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} a_j\right) + b_i\right] y_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_i a_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i a_i + c. \end{aligned}$$

由于  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  是正定形, 故必有  $\delta = |a_{ij}| > 0$ , 从而, 线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_j + b_i = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (2)$$

有唯一的一组解  $a_1, \cdots, a_n$ , 今取变换(1)式中的诸  $a_i$  即为方程组(2)的解. 于是,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + c', \quad (3)$$

其中

$$c' = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} a_j\right) a_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i a_i + c = - \sum_{i=1}^n b_i a_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i a_i + c = \sum_{i=1}^n b_i a_i + c. \quad (4)$$

下面我们用诸  $a_{ij}$  和  $b_i$  及  $c$  来表示  $c'$ , 令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix}$$

( $n+1$  阶行列式, 即  $|a_{ij}|$  的加边行列式). 将此行列式的第一列乘上  $a_1$ , 第二列乘上  $a_2, \cdots$ , 第  $n$  列乘上  $a_n$  都加到第  $n+1$  列上去, 并注意到(2)式与(4)式, 得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1j} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} & \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \sum_{j=1}^n b_j \alpha_j + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c' \end{vmatrix} = c' |a_{ij}| = c' \delta,$$

故

$$c' = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (5)$$

由于  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$  是正定二次型, 故由高等代数中二次型的理论知, 存在正交矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} z_j \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (6)$$

下, 二次型变为平方和:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2, \quad (7)$$

其中  $\lambda_i > 0 (i=1, 2, \cdots, n)$ ; 也即

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ . 由于  $P$  为正交矩阵, 故  $P^{-1} = P'$  ( $P'$  表  $P$  的转置矩阵), 且  $|P| = |p_{ij}| = \pm 1$ .

由(8)式又知

$$\delta = |a_{ij}| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \quad (9)$$

根据(1)式与(6)式, 可知

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} = 1, \quad \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} = |p_{ij}| = |P| = \pm 1.$$

于是, 利用广义  $n$  重积分的变量代换公式, 并注意到被积函数的非负性, 得(注意(3)式、(5)式与(7)式)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + c' \right\}} \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \right\}} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} \left| \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} \right| dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 z_1^2} dz_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2 z_2^2} dz_2 \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n z_n^2} dz_n \right). \end{aligned}$$

作代换  $z_i = \frac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$  ( $i$  固定), 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i z_i^2} dz_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$



以此代入上式,并注意到(9)式,最后得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}.$$

## § 11. 曲线积分

1° 第一型曲线积分 若函数  $f(x, y, z)$  在平滑曲线  $C$

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

的各点上有定义并且连续,  $ds$  为弧长的微分, 则

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特征在于它与曲线  $C$  的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学上的应用 若  $\rho = \rho(x, y, z)$  为曲线  $C$  在点  $(x, y, z)$  的线密度, 则曲线  $C$  的质量等于:

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的质心坐标  $(x_0, y_0, z_0)$  由以下公式来表示:

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3° 第二型曲线积分 若函数  $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$  在曲线(1)上的各点是连续的, 且曲线的方向是使参数  $t$  增加的方向, 则

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{t_0}^T \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt, \end{aligned} \quad (2)$$

当沿曲线  $C$  的方向变更时, 此积分的符号也变更. 在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线  $C$  时变力  $\{P, Q, R\}$  所作的功.

4° 全微分的情形 若

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du,$$

式中  $u = u(x, y, z)$  为区域  $V$  内的单值函数, 则积分值与完全位于区域  $V$  内的曲线  $C$  的形状无关:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

式中  $(x_1, y_1, z_1)$  为积分路径的始点,  $(x_2, y_2, z_2)$  为其终点. 最简单的情况下, 若区域  $V$  是单联通的, 而函数  $P, Q, R$  有连续的一阶偏导数, 则上式成立的充分必要条件为: 在区域  $V$  内, 下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时, 在区域  $V$  是标准长方体这种简单情形下, 函数  $u$  可按下面的公式来求得

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c,$$

其中  $(x_0, y_0, z_0)$  为区域  $V$  内某一固定的点, 而  $c$  是任意常数.

计算下列第一型曲线积分:

【4221】  $\int_C (x+y) ds$ , 其中  $C$  为以  $O(0,0), A(1,0)$  和  $B(0,1)$  为顶点的三角形围线.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_C (x+y) ds &= \int_{OA} (x+y) ds + \int_{AB} (x+y) ds + \int_{BO} (x+y) ds \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{2} dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

【4222】  $\int_C y^2 ds$ , 其中  $C$  为摆线  $x=a(t-\sin t)$ ,  $y=a(1-\cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一拱.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$ .

于是,  $\int_C y^2 ds = 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} (1-\cos t)^2 dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \frac{t}{2} dt = 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u u du = \frac{256}{15} a^3$ .

【4223】  $\int_C (x^2 + y^2) ds$  其中  $C$  为曲线  $x=a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y=a(\sin t - t \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = at dt$ .

于是,  $\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} [a^2 (\cos t + t \sin t)^2 + a^2 (\sin t - t \cos t)^2] at dt = \int_0^{2\pi} a^3 t (1+t^2) dt = 2\pi^2 a^3 (1+2\pi^2)$ .

【4224】  $\int_C xy ds$  其中  $C$  为双曲线  $x=a \operatorname{ch} t$ ,  $y=a \operatorname{sh} t$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) 的弧.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t} dt = a \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt$ .

于是,  $\int_C xy ds = a^3 \int_0^{t_0} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{t_0} \operatorname{sh} 2t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt = \frac{a^3}{4} \int_0^{t_0} \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) = \frac{a^3}{6} (\sqrt{\operatorname{ch}^3 2t_0} - 1)$ .

【4225】  $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds$ , 其中  $C$  为星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  的弧.

解 解法 1:

按直角坐标方程计算, 弧长的微分为  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ .

于是,  $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds = 4 \int_0^a [x^{\frac{1}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}] \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (2x + a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}) dx = 4a^{\frac{7}{3}}$ .

解法 2:

按参数方程计算. 若令  $x=a \cos^3 t$ ,  $y=a \sin^3 t$ , 则

$$ds = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \cos t \sin t dt \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是,  $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds = 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t + \sin^3 t) 3a \cos t \sin t dt = 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d(\sin t) = 4a^{\frac{7}{3}}$ .

【4226】  $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$  其中  $C$  为由曲线  $r=a$ ,  $\varphi=0$ ,  $\varphi=\frac{\pi}{4}$  ( $r$  和  $\varphi$  为极坐标) 给出的凸围线.

解 凸围线由三段组成, 分别是: 直线段  $\varphi=0$  ( $0 \leq r \leq a$ ); 圆弧段  $r=a$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ); 直线段  $\varphi=\frac{\pi}{4}$  ( $0 \leq r \leq a$ ). 弧长的微分相应地是:  $ds=dr$ ;  $ds=\sqrt{r^2+r'^2} d\varphi=a d\varphi$ ;  $ds=dr$ . 于是,

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\varphi + \int_0^a e^r dr = 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4}.$$

【4227】  $\int_C |y| ds$  其中  $C$  为双纽线  $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$  的弧.

解 双纽线的极坐标方程为  $r^2=a^2 \cos 2\varphi$ , 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{r^2+r'^2} d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$$

于是,  $\int_C |y| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4a^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 (2-\sqrt{2})$ .

【4228】  $\int_C x ds$ , 其中  $C$  为对数螺线  $r=ae^{k\varphi}$  ( $k>0$ ) 在圆  $r=a$  内的部分.

解 弧长的微分为  $ds=ae^{k\varphi} \sqrt{1+k^2} d\varphi$  ( $-\infty < \varphi < 0$ ).

于是,  $\int_C x ds = \int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi} \cos \varphi \cdot ae^{k\varphi} \sqrt{1+k^2} d\varphi = a^2 \sqrt{1+k^2} \frac{2k \cos \varphi + \sin \varphi}{1+4k^2} e^{2k\varphi} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{2ka^2 \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$ .



【4229】  $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$ , 其中  $C$  为圆周  $x^2+y^2=ax$ .

解 对于上半圆周, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2} dx = \frac{a}{2y} dx = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx \quad (0 \leq x \leq a).$$

于是,  $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds = 2 \int_0^a \sqrt{ax} \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx = a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2.$

【4230】  $\int_C \frac{ds}{y^2}$ , 其中  $C$  为悬链线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

于是,  $\int_C \frac{ds}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\operatorname{sh} \frac{x}{a})}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \arctan(\operatorname{sh} \frac{x}{a}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}.$

求下列空间曲线的弧长(参数是正的):

【4231】  $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$ , 从  $O(0,0,0)$  到  $A(3,3,2)$ .

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = 3(2t^2 + 1) dt.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^1 3(2t^2 + 1) dt = 5.$$

【4232】  $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}$ , 当  $0 < t < +\infty$ .

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}} dt = \sqrt{3} e^{-t} dt.$

于是, 弧长为

$$s = \sqrt{3} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{3}.$$

【4233】  $y = a \arcsin \frac{x}{a}, z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$ , 从  $O(0,0,0)$  到  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2-x^2} + \frac{a^2}{4(a^2-x^2)^2}} = \frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)} dx \quad (|x_0| < a).$

于是, 当  $x_0 \geq 0$  时, 有

$$s = \int_0^{x_0} \frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)} dx = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} + x_0 = |z_0| + |x_0|;$$

当  $x_0 < 0$  时, 有

$$s = \int_{x_0}^0 \frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)} dx = -\frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|.$$

总之, 当  $|x_0| < a$ , 有  $s = |z_0| + |x_0|$ .

【4234】  $(x-y)^2 = a(x+y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2$ , 从  $O(0,0,0)$  到  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

解 由  $(x-y)^2 = a(x+y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2$  可解得

$$x = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^2} + \sqrt{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right], \quad y = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^2} - \sqrt{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right].$$

注意到

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{8}{9a^2} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^4} \sqrt[3]{z^2} + \frac{2}{9} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^{-2}} = \frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^{-2}},$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^{-2}} + 1} dz = \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \frac{1}{t} + 1} \frac{3\sqrt[3]{t}}{2} dt$$



$$= \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt[3]{z_0}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t^2 + t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}} dt = \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt[3]{z_0}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{a}} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{3}} \right) dt$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{3z_0}{a}} + 2\sqrt{\frac{az_0^2}{3}} \right).$$

【4235】  $x^2 + y^2 = cz, \frac{y}{x} = \tan \frac{z}{c}$ , 从  $O(0,0,0)$  到  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

提示 取曲线的参数方程为  $x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, z = z$ .

解 取曲线的参数方程为  $x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, z = z$ , 则弧长的微分为

$$ds = \left[ \left( \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \cos \frac{z}{c} - \sqrt{\frac{z}{c}} \sin \frac{z}{c} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \sin \frac{z}{c} - \sqrt{\frac{z}{c}} \cos \frac{z}{c} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dz = \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1} dz$$

$$= \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}} dz.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^{z_0} \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}} dz = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{z}{c}} dz + \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt{cz_0} \left( 1 + \frac{2z_0}{3c} \right).$$

【4236】  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = a$ , 从点  $(a, 0, 0)$  到点  $B(x, y, z)$ .

解 令  $x = \sqrt{a^2 - z^2} \cos \varphi, y = \sqrt{a^2 - z^2} \sin \varphi$ , 不妨设  $z > 0$ , 则有

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2 \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right)} = a \operatorname{th} \varphi.$$

而  $\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{th}^2 \varphi)} = \frac{a}{\operatorname{ch} \varphi}$ , 故  $x = \frac{a \cos \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, y = \frac{a \sin \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, z = a \operatorname{th} \varphi$  为曲线的参数方程, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{\left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\varphi} \right)^2} d\varphi = a \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi + 1}{\operatorname{ch}^4 \varphi}} d\varphi = \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} \varphi}.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \sqrt{2} a \int_0^{\varphi} \frac{2}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} d\varphi = 2\sqrt{2} a \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 + (e^{\varphi})^2} d(e^{\varphi})$$

$$= 2\sqrt{2} a \arctan e^{\varphi} \Big|_0^{\varphi} = 2\sqrt{2} a \left( \arctan \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} \right)^{**} = \sqrt{2} a \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}^{**}.$$

容易推证, 当  $z < 0$  时, 弧长为  $s = \sqrt{2} a \arctan \frac{-z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$

总之, 最后得  $s = \sqrt{2} a \arctan \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$

\* ) 由  $z = a \operatorname{th} \varphi$  知:  $z(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = a(e^{\varphi} - e^{-\varphi}), z(e^{2\varphi} + 1) = a(e^{2\varphi} - 1),$

从而,  $e^{2\varphi} = \frac{a+z}{a-z}$  或  $e^{\varphi} = \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$

\*\* ) 由于  $\tan \left( \arctan \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z}, \tan \frac{1}{2} \left( \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z},$

故在主值范围内有  $\arctan \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$

计算沿空间曲线的第一型曲线积分:

【4237】  $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$  其中  $C$  为螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一段.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt$ , 于是,

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}.$$

【4238】  $\int_C x^2 ds$ , 其中  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ .

提示 由对称性知:  $\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds$ .

解 解法 1:

由对称性知:  $\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds$ . 于是,

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_C ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

解法 2:

作代换  $u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ ,  $v = \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}$ ,  $w = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$ , 则圆周  $C$  化为  $u^2 + v^2 + w^2 = a^2$ ,  $w = 0$ . 于是,

$$\begin{aligned} \int_C x^2 ds &= \int_C \left( \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 ds = \int_C \left( \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} \right)^2 ds = \frac{1}{6} \int_C (3u^2 + v^2) ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C u^2 ds + \frac{1}{3} \int_C v^2 ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds = \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} a^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

【4239】  $\int_C z ds$ , 其中  $C$  为圆锥螺旋线  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ).

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2 + t^2} dt$ .

于是,  $\int_C z ds = \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} [(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$ .

【4240】  $\int_C z ds$ , 其中  $C$  为曲线  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $y^2 = ax$  上从点  $O(0, 0, 0)$  到点  $A(a, a, a\sqrt{2})$  的弧.

解 由曲线方程得  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} + y^2} = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}$ .

从而, 曲线的参数方程可取为  $x = \frac{y^2}{a}$ ,  $y = y$ ,  $z = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}$ .

弧长的微分为  $ds = \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2 + a^2}{a \sqrt{y^2 + a^2}}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2 y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy$ .

于是,

$$\begin{aligned} \int_C z ds &= \int_0^a \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2} \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2 y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy = \frac{\sqrt{8}}{a^2} \int_0^a y \sqrt{y^4 + \frac{9}{8} a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right)^2 - \frac{17a^4}{16^2}} d\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[ \frac{y^2 + \frac{9a^2}{16}}{2} \sqrt{y^4 + \frac{9}{8} a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \left( y^2 + \frac{9a^2}{16} + \sqrt{y^4 + \frac{9}{8} a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} \right) \right] \Big|_0^a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[ \left( \frac{25a^4}{64} \sqrt{\frac{19}{2}} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}} a^2}{16} \right) - \left( \frac{9a^4}{64} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{17a^2}{16} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \frac{25a^4 \sqrt{38} - 18a^4}{128} + \frac{\sqrt{2}}{a^2} \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}} a^2}{16}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left[ 100\sqrt{38} - 72 - 17\ln \frac{25+4\sqrt{38}}{17} \right].$$

【4241】<sup>+</sup> 设曲线  $x = acost, y = bsint$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 在点  $(x, y)$  的线密度等于  $\rho = |y|$ , 求其质量.

解 质量  $M = \int_C |y| ds$ , 其中  $C$  为椭圆  $x = acost, y = bsint$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

先设  $a > b$ . 这时

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt$$

其中  $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ . 于是,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi absint \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt + \int_\pi^{2\pi} a(-bsint) \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= -ab \int_0^\pi \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} d(\cos t) + ab \int_\pi^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} d(\cos t) \\ &= ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du + ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du \\ &= \frac{4ab}{\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \epsilon u \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} + \frac{1}{2} \arcsin(\epsilon u) \right] \Big|_{u=0}^{u=1} = 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}. \end{aligned}$$

次设  $a < b$ . 这时

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt,$$

其中  $\epsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ . 仿前, 有

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi absint \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt + \int_\pi^{2\pi} a(-bsint) \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2} du \\ &= \frac{4ab}{\epsilon_1} \left[ \frac{1}{2} \epsilon_1 u \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2} + \frac{1}{2} \ln(\epsilon_1 u + \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2}) \right] \Big|_{u=0}^{u=1} = 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\epsilon_1 + \sqrt{1 + \epsilon_1^2})}{\epsilon_1}. \end{aligned}$$

最后, 若  $a = b$ , 则椭圆退化成圆, 这时  $ds = a dt$ , 故

$$M = \int_0^\pi a^2 \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} (-a \sin t) a dt = 4a^2.$$

综上所述, 可知:

$$M = \begin{cases} 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}, & a > b, \\ 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\epsilon_1 + \sqrt{1 + \epsilon_1^2})}{\epsilon_1}, & a < b, \\ 4a^2, & a = b, \end{cases}$$

其中

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (a > b), \quad \epsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \quad (a < b),$$

【4242】 求曲线  $x = at, y = \frac{a}{2} t^2, z = \frac{a}{3} t^3$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 的弧的质量, 其密度按规律  $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$  而变化.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{a^2 + a^2 t^2 + a^2 t^4} dt = a \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt$ ,

而密度  $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$ . 于是, 质量为 (作代换  $u = t^2$ )

$$\begin{aligned} M &= \int_C \sqrt{\frac{2y}{a}} ds = a \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt = \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + u + u^2} du \\ &= \frac{a}{2} \left[ \frac{u + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{1 + u + u^2} + \frac{3}{8} \ln \left( u + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + u + u^2} \right) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{a}{8} \left[ (3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right]. \end{aligned}$$



【4243】 计算均匀曲线  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  从点  $A(0, a)$  到点  $B(b, h)$  的弧的质心的坐标.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$ .

质量为  $M = \rho_0 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \rho_0 \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \rho_0 \sqrt{h^2 - a^2}$ .

于是, 质心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\rho_0}{M} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{\rho_0}{M} \left[ ab \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a^2 \left( \operatorname{ch} \frac{b}{a} - 1 \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left[ b \sqrt{h^2 - a^2} - a^2 \left( \frac{h}{a} - 1 \right) \right] \\ &= h - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\rho_0}{M} \int_0^b y \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{a \rho_0}{M} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a \rho_0}{M} \int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx = \frac{a \rho_0}{M} \left[ \frac{x}{2} + \frac{a}{4} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right] \Big|_0^b \\ &= \frac{a \rho_0}{M} \left( \frac{b}{2} + \frac{a}{4} \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right) = \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2 \sqrt{h^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

$$*) \text{ 由 } h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \text{ 知 } \operatorname{ch} \frac{b}{a} = \frac{h}{a}, \text{ 从而 } \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}.$$

【4244】 求摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) 的弧的质心.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$ .

质量为  $M = 2a \rho_0 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 4a \rho_0$ . 于是, 质心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^\pi \rho_0 a(t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{2} \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -at \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + a \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt + \frac{a}{4} \int_0^\pi \left( \cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) dt = \frac{4a}{3}; \\ y_0 &= \frac{1}{M} \int_0^\pi \rho_0 a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{4} \int_0^\pi \left( \sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) dt = \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

【4245】 计算球面上的三角形  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ;  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  的围线的质心的坐标.

解 作球坐标变换  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$ .

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = 0; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = \cos \psi, y = 0, z = a \sin \psi; 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = 0, y = a \cos \psi, z = a \sin \psi; 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为  $s = 3 \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{3\pi a}{2}$ . 于是, 质心的坐标为

$$x_0 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \psi \cdot a d\psi}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

利用对称性知:  $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$ .

【4246】 求均匀的弧  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  ( $-\infty < t \leq 0$ ) 的质心的坐标.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt = \sqrt{3} e^t dt$ .

质量为  $M = \int_{-\infty}^0 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3}$ .

于是,质心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^0 e^t \cos t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} \cos t dt = \frac{2 \cos t + \sin t}{5} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{2}{5}.$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^0 e^t \sin t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} \sin t dt = \frac{2 \sin t - \cos t}{5} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{5}.$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^0 e^t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = \frac{1}{2}.$$

【4247】 求螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一支对坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为  $ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt = \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt$ .

于是,转动惯量为

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} \left( a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \left( \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_C (x^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} \left( a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \left( \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

【4248】 计算第二型曲线积分  $\int_{OA} x dy - y dx$ ,

式中  $O$  为坐标原点,  $A$  点的坐标为  $(1, 2)$  并设: (1)  $OA$  为直线段; (2)  $OA$  为抛物线, 其轴为  $Oy$ ; (3)  $OA$  为由  $Ox$  轴上的线段  $OB$  和平行于  $Oy$  轴的线段  $BA$  组成的折线.

解 (1) 直线段的方程为  $y = 2x$ . 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 (2x - 2x) dx = 0.$$

(2) 抛物线段的方程为  $y = 2x^2$ . 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 (4x^2 - 2x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

(3) 线段  $OB$  的方程为  $y = 0$ ,  $BA$  的方程为  $x = 1$ . 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^2 0 \cdot dx + \int_0^2 dy = 2.$$

【4249】 对于上题中所指示的路径(1), (2), (3), 计算

$$\int_{OA} x dy + y dx.$$

解 (1)  $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^1 (2x + 2x) dx = 2.$

(2)  $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^1 (4x^2 + 2x^2) dx = 2.$

(3)  $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^2 dy = 2.$

在参数增加的方向, 沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分:

【4250】  $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , 其中  $C$  为抛物线  $y = x^2$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ).

解 由题设  $y = x^2$ , 从而,  $dy = 2x dx$ . 于是,

$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_1^1 [(x^2 - 2x^3) + 2x(x^4 - 2x^3)]dx = -\frac{14}{15}.$$

【4251】  $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ , 其中  $C$  为曲线  $y = 1 - |1 - x|$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).

解 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $y = 1 - (1 - x) = x$ , 从而,  $dy = dx$ ; 当  $1 \leq x \leq 2$  时,  $y = 1 - (x - 1) = 2 - x$ , 从而,  $dy = -dx$ . 于是,

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 [x^2 + (2-x)^2 - x^2 + (2-x)^2]dx = \frac{4}{3}.$$

【4252】  $\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$ , 其中  $C$  为依逆时针方向通过的椭圆周  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

解 利用椭圆的参数方程  $x = acost$ ,  $y = bsint$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 则有

$$\begin{aligned} \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_0^{2\pi} [(acost + bsint)(-asint) + (acost - bsint)bcost]dt \\ &= \int_0^{2\pi} (ab\cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2}\sin 2t)dt = 0. \end{aligned}$$

【4253】  $\int_C (2a-y)dx + xdy$ , 其中  $C$  为摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一拱.

解 由题设知:  $dx = a(1 - \cos t)dt$ ,  $dy = asintdt$ . 于是,

$$\begin{aligned} \int_C (2a-y)dx + xdy &= \int_0^{2\pi} \{[2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)asint\}dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt = -a^2 (t \cos t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

【4254】  $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , 其中  $C$  为依逆时针方向通过的圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ .

解 利用圆的参数方程  $x = acost$ ,  $y = asint$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 则有

$$\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-(acost + asint)asint - (acost - asint)acost}{a^2} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

【4255】  $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , 其中  $ABCD$  为以  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(-1,0)$ ,  $D(0,-1)$  为顶点的正方形的围线.

提示 注意正方形各边的方程分别为

$$AB: y = 1 - x; \quad BC: y = 1 + x; \quad CD: y = -1 - x; \quad DA: y = -1 + x.$$

解 正方形各边的方程分别为

$$AB: y = 1 - x; \quad BC: y = 1 + x; \quad CD: y = -1 - x; \quad DA: y = -1 + x.$$

于是,

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} &= \int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{-x - y} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{x - y} \\ &= \int_1^0 (1-1)dx + \int_0^{-1} 2dx + \int_{-1}^0 (1-1)dx + \int_0^1 2dx = 0. \end{aligned}$$

【4256】  $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$ , 其中  $AB$  为介于点  $A(0, \pi)$  和点  $B(\pi, 0)$  之间的直线段.

解  $AB$  的方程为  $y = \pi - x$ . 于是,

$$\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy = \int_0^\pi \sin(\pi - x)dx - \sin x dx = \int_0^\pi (\sin x - \sin x)dx = 0.$$

注 原题为  $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$ , 若把它理解为  $\int_{AB} d(x \sin y) + d(y \sin x)$ , 其值仍为零, 与原答案也符合.

【4257】  $\oint_{OmAO} \arctan \frac{y}{x} dy - dx$ , 其中  $OmA$  为抛物线段  $y = x^2$ ,  $OnA$  为直线段  $y = x$



解 如图 8.62 所示,我们有

$$\begin{aligned} \oint_{(m,n)} \arctan \frac{y}{x} dy - dx &= \int_{(m,n)} \arctan \frac{y}{x} dy - dx + \int_{(n,m)} \arctan \frac{y}{x} dy - dx \\ &= \int_0^1 2x \arctan x dx - \int_0^1 dx + \int_1^0 (\arctan 1 - 1) dx \\ &= x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - 1 + \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) x \Big|_1^0 \\ &= \frac{\pi}{4} - (x - \arctan x) \Big|_0^1 - 1 - \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - 1 \end{aligned}$$

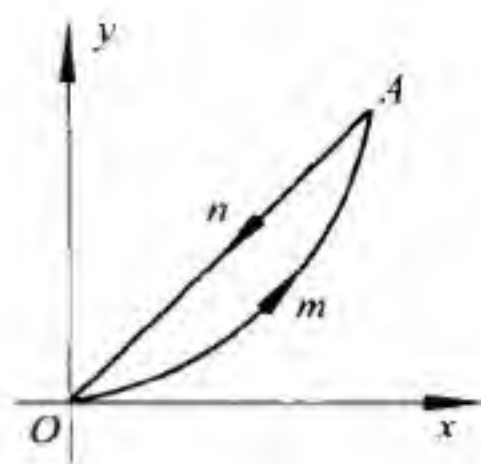


图 8.62

注 原题为  $\int_{(m,n)} dy \arctan \frac{y}{x} - dx$ , 若把它理解为

$$\int_{(m,n)} d\left(y \arctan \frac{y}{x}\right) - dx,$$

则其值为零, 与原答案不符.

验证被积函数为全微分, 并计算下列曲线积分:

【4258】  $\int_{(1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx.$

解 显然,  $x dy + y dx = d(xy)$  是全微分. 于是,

$$\int_{(1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx = \int_{(1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy \Big|_{(1,2)}^{(2,3)} = 8.$$

【4259】  $\int_{(0,1)}^{(3,-1)} x dx + y dy.$

解 显然,  $x dx + y dy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$  是全微分. 于是,

$$\int_{(0,1)}^{(3,-1)} x dx + y dy = \int_{(0,1)}^{(3,-1)} d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = \frac{x^2 + y^2}{2} \Big|_{(0,1)}^{(3,-1)} = 12.$$

【4260】  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy.$

解 显然, 我们有

$$(x+y) dx + (x-y) dy = (y dx + x dy) + (x dx - y dy) = d(xy) + d\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) = d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right),$$

即是全微分. 于是,  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy = \int_{(0,1)}^{(2,3)} d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) = \left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) \Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = 4.$

【4261】  $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy).$

解 显然,  $(x-y)(dx-dy) = d\left(\frac{(x-y)^2}{2}\right)$  是全微分. 于是,

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy) = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} d\left(\frac{(x-y)^2}{2}\right) = \frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2.$$

【4262】  $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$ , 其中  $f(u)$  为连续函数.

解题思路 令  $F(x,y) = \int_0^{x+y} f(u) du$ . 注意

$$F'_x(x,y) = F'_y(x,y) = f(x+y), \quad \text{及} \quad dF(x,y) = f(x+y)(dx+dy),$$

即可获解.

解 令  $F(x,y) = \int_0^{x+y} f(u) du$ . 由于  $f(u)$  连续, 故

$$F'_x(x,y) = f(x+y), \quad F'_y(x,y) = f(x+y),$$

并且它们都是  $x, y$  的连续函数, 因此,  $F(x, y)$  可微, 且

$$dF(x, y) = F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = f(x+y)(dx+dy),$$

故  $f(x+y)(dx+dy)$  是全微分, 并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x, y)(dx+dy) = F(a, b) - F(0, 0) = \int_0^{a+b} f(u)du.$$

**【4263】**  $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$  沿着不与  $Oy$  轴相交的路径.

解 显然, 当  $x \neq 0$  时,  $\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$  是全微分. 于是,

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x} \Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}.$$

**【4264】**  $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然, 当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,  $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$  是全微分. 于是,

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

**【4265】**  $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$ , 其中  $\varphi$  和  $\psi$  为连续函数.

解 由于  $\varphi, \psi$  是连续函数, 故显然有

$$\varphi(x) dx + \psi(y) dy = dF(x) + dG(y) = d[F(x) + G(y)],$$

其中  $F(x) = \int_{x_1}^x \varphi(u) du$ ,  $G(y) = \int_{y_1}^y \psi(v) dv$ . 从而,  $\varphi(x) dx + \psi(y) dy$  是函数  $F(x) + G(y)$  的全微分, 于是,

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy &= [F(x) + G(y)] \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = [F(x_2) + G(y_2)] - [F(x_1) + G(y_1)] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv. \end{aligned}$$

**【4266】**  $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ .

解  $P = x^4 + 4xy^3$ ,  $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$ . 显然,  $P, Q$  在全平面上具有连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2,$$

故  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ . 由于全平面是单连通区域, 故在整个平面上表达式  $Pdx + Qdy$  是某函数  $u(x, y)$  的全微分, 并且

线积分  $\int_C Pdx + Qdy$  与路径无关, 因而, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy &= \int_{-2}^3 (x^4 + 4x \cdot 0^3) dx + \int_{-1}^0 [6(-2)^2 y^2 - 5y^4] dy \\ &= 55 + 7 = 62. \end{aligned}$$

注 也可利用简单的技巧求出函数  $u(x, y)$  来. 我们有

$$(x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy = d\left(\frac{x^5}{5}\right) + 2y^3 d(x^2) + 2x^2 d(y^3) - d(y^5) = d\left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right),$$

从而,  $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy = \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right) \Big|_{(-2, -1)}^{(3, 0)} = 62.$

**【4267】**  $\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}$  沿着不与直线  $y = x$  相交的路径.

解  $P = -\frac{y}{(x - y)^2}$ ,  $Q = \frac{x}{(x - y)^2}$  ( $x \neq y$ ). 容易验证:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} \quad (x \neq y).$$

考虑平面上的区域  $\Omega = \{(x, y) | x > y\}$ . 由于  $\Omega$  是单连通区域, 且在其上  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 故在  $\Omega$  上,  $Pdx + Qdy$  是某函数  $u = u(x, y)$  的全微分. 从而, 在  $\Omega$  上线积分  $\int_C Pdx + Qdy$  与路径无关. 因此, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} = \int_0^1 \frac{-(-1)dx}{(x+1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

注 也可利用简单的技巧求出函数  $u(x, y)$  来. 我们有

$$\frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)dy - yd(x-y)}{(x-y)^2} = d\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而, 
$$\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} = \frac{y}{x-y} \Big|_{(0, -1)}^{(1, 0)} = 1.$$

**【4268】**  $\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi/2)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$  沿着不与  $Oy$  轴相交的路径.

解 当  $x \neq 0$  时, 有

$$P = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}, \quad Q = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

考虑右半平面  $\Omega = \{(x, y) | x > 0\}$ . 由于  $\Omega$  是单连通区域, 且在其上  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 故在  $\Omega$  上必是某函数  $u(x, y)$  的全微分, 且可取

$$u(x, y) = \int_1^x \left(1 - \frac{y^2}{t^2} \cos \frac{y}{t}\right) dt + \int_t^y (\sin y + y \cos y) dy = \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_1^x + y \sin y \Big|_x^y = x - 1 + y \sin \frac{y}{x}.$$

于是, 
$$\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi/2)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy = \left(x - 1 + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_{(1, \pi)}^{(2, \pi/2)} = \pi + 1.$$

**【4269】**  $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$

解 显然, 有  $e^x (\cos y dx - \sin y dy) = d(e^x \cos y)$ . 于是,

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy) = \int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x \cos y) = (e^x \cos y) \Big|_{(0,0)}^{(a,b)} = e^a \cos b - 1.$$

**【4270】** 证明: 若  $f(u)$  为连续函数且  $C$  为分段光滑的封闭曲线, 则

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

**证明思路** 若能求得函数  $F(x, y)$ , 使  $dF(x, y) = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$  (即  $F'_x(x, y) = x f(x^2 + y^2)$ ,  $F'_y(x, y) = y f(x^2 + y^2)$ ), 即可证明:

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} = F(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) = 0,$$

其中  $(x_0, y_0)$  为  $C$  上任意取定的一点. 经过分析, 易知  $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) du$  就是这样的函数.

**证** 令  $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) du$ . 由于  $f(u)$  是连续函数, 故

$$F'_x(x, y) = x f(x^2 + y^2), \quad F'_y(x, y) = y f(x^2 + y^2),$$

并且显然  $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$  都是  $x, y$  的连续函数. 因此,  $F(x, y)$  可微, 且

$$dF(x, y) = F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy).$$

于是, 任取  $C$  上一点  $(x_0, y_0)$ , 有



$$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = F(x,y) \Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)} = F(x_0,y_0) - F(x_0,y_0) = 0.$$

证毕.

求原函数  $z$ , 设:

$$\text{【4271】 } dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy.$$

$$\text{解 } z = \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2)dx + \int_0^y (0 - 0 - y^2)dy + C = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C.$$

$$\text{【4272】 } dz = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$\text{解 } z = \int_0^x \frac{ydx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} + \int_1^y 0dy + C = \frac{y}{3} \int_0^x \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C$$

$$= \frac{y}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}y} \arctan \frac{3\left(x - \frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y} \Big|_0^x + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3x-y}{2\sqrt{2}y} + C_1.$$

$$\text{【4273】 } dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x+y)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } z &= \int_0^x \frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3} dx + \int_1^y \frac{0 - 0 + y^2}{(0+y)^3} dy + C = \int_0^x \frac{(x+y)^2 + 4y^2}{(x+y)^3} dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + C \\ &= [\ln|x+y|] \Big|_0^x - \frac{2y^2}{(x+y)^2} \Big|_0^x + [\ln|y|] \Big|_1^y + C = \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1. \end{aligned}$$

$$\text{【4274】 } dz = e^x[e^y(x-y+2)+y]dx + e^x[e^y(x-y)+1]dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } z &= \int_0^x [(x-y+2)e^{x+y} + ye^x]dx + \int_0^y (1 - ye^x)dy + C \\ &= [(x-y+1)e^{x+y} + ye^x] \Big|_0^x + [y - ye^x + e^x] \Big|_0^y + C = (x-y+1)e^{x+y} + ye^x + C_1. \end{aligned}$$

$$\text{【4275】 } dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy.$$

提示 注意  $dz = d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right)$ .

$$\text{解 因为 } dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy = d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right).$$

$$\text{故有 } z = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m} + C.$$

$$\text{【4276】 } dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m+1}}\left(\ln \frac{1}{r}\right)dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+2}}\left(\ln \frac{1}{r}\right)dy, \text{ 其中 } r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

解 易知(当  $(x,y) \neq (0,0)$  时)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \frac{1}{r}\right) &= -\frac{x}{r^2}, & \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln \frac{1}{r}\right) &= -\frac{y}{r^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln \frac{1}{r}\right) &= -\frac{r^2 - 2x^2}{r^4}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln \frac{1}{r}\right) &= -\frac{r^2 - 2y^2}{r^4}, \end{aligned}$$

故(当  $(x,y) \neq (0,0)$  时)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln \frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln \frac{1}{r}\right) = 0. \quad (1)$$

$$\text{令 } P = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m+1}}\left(\ln \frac{1}{r}\right), \quad Q = -\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+2}}\left(\ln \frac{1}{r}\right),$$

则当  $(x,y) \neq (0,0)$  时, 由(1)式知

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln \frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln \frac{1}{r}\right) \right] = 0.$$

因此,在任何不含原点(0,0)的单连通域中, $Pdx+Qdy$  都是某函数  $z$  的全微分,并且对上半平面的点  $(x,y)$  (即  $y>0$ ),可取

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \int_0^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(0,y)dy + C \\ &= \int_0^x \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) dx - \int_1^y \left[ \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n+2}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} dy + C \\ &= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) - \left[ \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} - \left[ \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n+1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n+1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0, y=1} + C \\ &= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} + C_1 \\ &= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left( -\frac{x}{r^2} \right) + C_1 = \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left( \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} \right) + C_1 = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left( \arctan \frac{x}{y} \right) + C_1, \end{aligned}$$

其中  $C_1 = \left[ \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n+1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0, y=1} + C$  是任意常数.

同理,对下半平面上的点  $(x,y)$  (即  $y<0$ ),可取

$$z(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(0,y)dy + C.$$

经过和前面完全类似的计算,可得  $z(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left( \arctan \frac{x}{y} \right) + C_2$ ,

其中

$$C_2 = \left[ \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n+1}} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0, y=-1} + C$$

也是任意常数.

**【4277】** 证明下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left| \int_C Pdx + Qdy \right| \leq LM,$$

式中  $L$  为积分路径的长,  $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$  (在弧  $C$  上).

**证明思路** 首先注意到

$$\left| \int_C Pdx + Qdy \right| = \left| \int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds \right| \leq \int_C |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| ds,$$

其次,由  $(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 + (P \sin \alpha - Q \cos \alpha)^2 = P^2 + Q^2$  可知

$$(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2 \quad \text{或} \quad |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M.$$

从而,命题易获证.

$$\text{证 由于} \quad \left| \int_C Pdx + Qdy \right| = \left| \int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds \right| \leq \int_C |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| ds,$$

又因

$$(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 = P^2 \cos^2 \alpha + Q^2 \sin^2 \alpha + 2PQ \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$0 \leq (P \sin \alpha - Q \cos \alpha)^2 = P^2 \sin^2 \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha - 2PQ \sin \alpha \cos \alpha,$$

故有

$$(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2,$$

从而,  $|P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M$ . 于是,

$$\left| \int_C Pdx + Qdy \right| \leq M \int_C ds = LM.$$

**【4278】** 估计积分  $I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ . 证明:  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ .

**提示** 注意在圆  $x^2 + y^2 = R^2$  上,有  $P^2 + Q^2 \leq \frac{16}{R^6}$ , 及  $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2} \leq \frac{4}{R^3}$ , 并利用 4277 题的结果.

解 在圆  $x^2 + y^2 = R^2$  上,有

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 &= \frac{y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} + \frac{x^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\ &= \frac{R^2}{(R^2 + xy)^4} \leq \frac{R^2}{(R^2 - |xy|)^4} \leq \frac{R^2}{\left(R^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} = \frac{16}{R^6}. \end{aligned}$$

于是,  $M \leq \frac{4}{R^3}$ . 利用 4277 题的结果, 即得  $I_R$  的估计式:

$$|I_R| \leq \frac{4}{R^3} \cdot 2\pi R = \frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知:  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ .

计算沿空间曲线的积分(假定坐标系是右手的):

【4279】  $\int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$ , 式中  $C$  为曲线  $x=t, y=t^2, z=t^3$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), 以参数增加的方向为正.

$$\text{解 } \int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt = \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}.$$

【4280】  $\int_C y dx + z dy + x dz$ , 式中  $C$  为纽形螺线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 以参数增加方向为正.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_C y dx + z dy + x dz &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \cos t + abt \cos t + ab \cos t) dt \\ &= \left( -\frac{at^2}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + abt \sin t + ab \cos t + ab \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi a^2. \end{aligned}$$

【4281】  $\int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$ , 式中  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \tan \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ), 若从  $Ox$  轴的正向看去, 沿逆时针方向为正.

解 如图 8.63 所示, 利用球面的参数方程

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = a \sin \varphi \cos \psi, \quad z = a \sin \psi,$$

在  $\widehat{ABC}$  上,  $\varphi = \alpha$ , 因而, 有

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha \cos \psi, & dx &= -a \cos \alpha \sin \psi d\psi, \\ y &= a \sin \alpha \cos \psi, & dy &= -a \sin \alpha \sin \psi d\psi, \\ z &= a \sin \psi, & dz &= a \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{H. } \int_{\widehat{ABC}} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz &= a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-(\sin \alpha \cos \psi - \sin \psi) \cos \alpha \sin \psi - (\sin \psi - \cos \alpha \cos \psi) \sin \alpha \sin \psi \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \cos \psi) \cos \psi] d\psi \\ &= a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\psi = \pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) = \sqrt{2} \pi a^2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right). \end{aligned}$$

在  $\widehat{CDA}$  上,  $\varphi = \alpha + \pi$  同样可得

$$\int_{\widehat{CDA}} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz = -a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha - \cos \alpha) d\psi = \sqrt{2} \pi a^2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

于是, 最后得  $\int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz = 2\sqrt{2} \pi a^2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ .

【4282】  $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , 式中  $C$  为维维亚尼曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$  ( $z \geq 0, a > 0$ ),

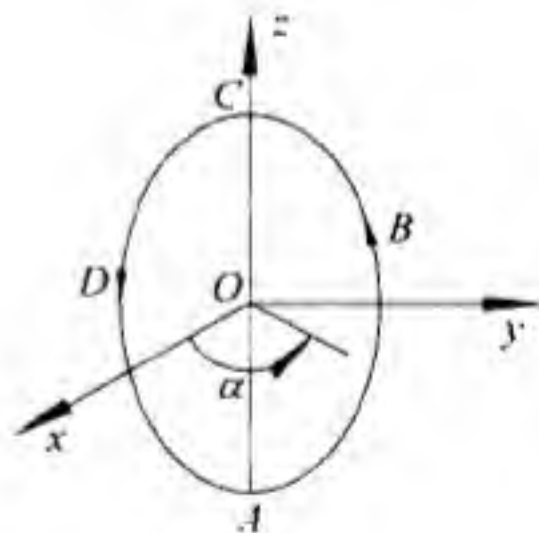


图 8.63



若从  $Ox$  轴的正向 ( $x > 0$ ) 看去, 沿逆时针方向为正.

**解** 柱面  $x^2 + y^2 = ax$  可变为  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ,

故若令  $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 则

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2 - \left[\frac{a^2(1 + \cos t)^2}{4} + \frac{a^2 \sin^2 t}{4}\right]} = a \sin \frac{t}{2}.$$

从而, 曲线的参数方程为  $x = \frac{a(1 + \cos t)}{2}, y = \frac{a \sin t}{2}, z = a \sin \frac{t}{2}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

$$\begin{aligned} \text{于是, } \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{a^3 \sin^3 t}{8} + \frac{a^3 \sin^2 \frac{t}{2} \cos t}{2} + \frac{a^3 \cos^3 \frac{t}{2}}{2} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{8} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) + \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2} \cos t dt + a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\sin \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{a^3}{8} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t\right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^3}{4} \left[\sin t - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t\right)\right] \Big|_0^{2\pi} + a^3 \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

**【4283】**  $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ , 式中  $C$  为球面的一部分  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0,$

$y \geq 0, z \geq 0$  的边界, 当沿着它的正向移动时, 这部分球面的外侧面保持在左方.

**解** 边界在  $Oxy$  平面部分的方程为

$$x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

根据轮换对称性知, 只要沿这部分计算线积分, 再三倍之, 便得要求的结果, 即

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 \varphi \cdot (-\sin \varphi) - \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi] d\varphi \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = 3 \left( \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -4. \end{aligned}$$

计算下列全微分的曲线积分:

**【4284】**  $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz$ .

**解**  $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz = \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} = -53 \frac{7}{12}.$

**【4285】**  $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$ .

**解**  $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz = xyz \Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} = 0.$

**【4286】**  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , 其中点  $(x_1, y_1, z_1)$  位于球  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  之上, 而点  $(x_2, y_2, z_2)$

位于球  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  之上 ( $a > 0, b > 0$ ).

**解** 由题设知:  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2$ .

于是,  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = b - a.$

**【4287】**  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz$ , 式中  $\varphi, \psi, \chi$  为连续函数.

**解** 因为  $\varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz = d\left(\int_{x_1}^x \varphi(u) du + \int_{y_1}^y \psi(v) dv + \int_{z_1}^z \chi(w) dw\right),$

故有  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz = \left(\int_{x_1}^x \varphi(u) du + \int_{y_1}^y \psi(v) dv + \int_{z_1}^z \chi(w) dw\right) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)}$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv + \int_{z_1}^{z_2} \chi(w) dw.$$

**【4288】**  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$ , 其中  $f$  为连续函数.

解 令  $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} f(u) du$ . 由于  $f(u)$  是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = f(x+y+z), \quad F'_y(x, y, z) = f(x+y+z), \quad F'_z(x, y, z) = f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此,  $F(x, y, z)$  可微, 且

$$dF(x, y, z) = F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = f(x+y+z)(dx+dy+dz).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz) &= F(x, y, z) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) \\ &= \int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u) du - \int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u) du = \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u) du. \end{aligned}$$

**【4289】**  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz),$

式中  $f$  为连续函数.

解题思路 令  $F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v}) dv$ . 注意

$$F'_x(x, y, z) = xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_y(x, y, z) = yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_z(x, y, z) = zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

及

$$dF(x, y, z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz),$$

再令  $\sqrt{v} = u$ , 即可得结果  $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u) du$ .

解 令  $F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v}) dv$ . 由于  $f$  是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_y(x, y, z) = yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_z(x, y, z) = zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此,  $F(x, y, z)$  可微, 且

$$dF(x, y, z) = F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz) &= F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2} \int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2} f(\sqrt{v}) dv \\ &= \int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u) du, \end{aligned}$$

\* ) 这里已作代换  $\sqrt{v} = u$  ( $v = u^2$ ,  $dv = 2u du$ ).

求原函数  $u$ , 若:

**【4290】**  $du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz.$

解  $du = (x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz) - 2(yz dx + xz dy + xy dz) = d\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz\right).$

于是,  $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C.$

**【4291】**  $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz.$

解  $du = dx + \left(-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy\right) + \frac{1}{z}(ydx + xdy) - \frac{xy}{z^2}dz$   
 $= dx + \left(-\frac{1}{y}dx + xd\left(-\frac{1}{y}\right)\right) + \frac{1}{z}d(xy) + xy d\left(\frac{1}{z}\right) = dx + d\left(-\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{xy}{z}\right)$



$$=d\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

于是,  $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$ .

$$\text{【4292】 } du = \frac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & (x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz \\ &= (xdx+ydy) + (ydx+xdy) + (x+y)dz - z(dx+dy) + zdz \\ &= \frac{1}{2}d[(x^2+y^2+2xy)+z^2] + (x+y)dz - zd(x+y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } du &= \frac{1}{2} \frac{d[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2} + \frac{(x+y)dz - zd(x+y)}{(x+y)^2+z^2} = \frac{1}{2}d\ln[(x+y)^2+z^2] + d\left(\arctan \frac{z}{x+y}\right) \\ &= d\left[\ln \sqrt{(x+y)^2+z^2} + \arctan \frac{z}{x+y}\right]. \end{aligned}$$

于是,  $u = \ln \sqrt{(x+y)^2+z^2} + \arctan \frac{z}{x+y} + C$ .

【4293】 求当质量为  $m$  的点从位置  $(x_1, y_1, z_1)$  移动到位置  $(x_2, y_2, z_2)$  时, 重力所作的功 ( $Oz$  轴的方向是竖直向上).

解 设  $i, j, k$  为各坐标轴上的单位矢量, 则重力  $F = -mgk$ , 而  $ds = dx i + dy j + dz k$ . 从而, 功的微分为

$$dA = F \cdot ds = -mgdz = d(-mgz).$$

于是, 重力所作的功为  $A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} -mgdz = (-mgz) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = -mg(z_2 - z_1)$ .

【4294】<sup>+</sup> 弹性力指向坐标原点, 力的大小与质点到坐标原点的距离成正比. 设此点依逆时针方向描绘出椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的正四分之一, 求弹性力所作的功.

解 弹性力  $F = -k(xi + yj)$ , 其中  $k$  为弹性系数. 功的微分为

$$dA = F \cdot ds = -k(xi + yj)(dx i + dy j) = -k(xdx + ydy) = d\left[-\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right].$$

于是, 弹性力所作的功为

$$A = -k \int_{(a, 0)}^{(0, b)} xdx + ydy = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) \Big|_{(a, 0)}^{(0, b)} = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

【4295】<sup>+</sup> 当单位质量从点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  移动到点  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  时, 求引力  $F = \frac{G}{r^2}$  (其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) 对它所作的功, 其中  $G$  是引力常量.

解 引力指向坐标原点, 故它的方向余弦为

$$\cos \alpha = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta = -\frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = -\frac{z}{r},$$

而引力的投影为

$$X = -\frac{Gx}{r^3}, \quad Y = -\frac{Gy}{r^3}, \quad Z = -\frac{Gz}{r^3}.$$

于是, 引力所作的功为

$$\begin{aligned} A &= -G \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -\frac{G}{2} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= G \left( \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right). \end{aligned}$$

当然, 这里假设从  $M_1$  点到  $M_2$  点的路径是不经过原点的, 上式表明功与路径无关, 仅决定于起始点的坐标.



## § 12. 格林公式

1° 曲线积分与二重积分的关系 设  $C$  为分段光滑的简单封闭围线, 它围成单连通的有界区域  $S$ , 并且当沿着围线正方向移动时, 区域  $S$  保持在左边; 此外, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  及其一阶偏导数  $P'_y(x, y), Q'_x(x, y)$  在区域  $S$  内及其边界上皆是连续的, 则成立格林公式

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$

若把区域  $S$  的边界  $C$  理解为一切边界围线之和, 并且这样选取沿围线的环绕方向, 使得区域  $S$  始终位于左边, 则公式(1)对于由几个简单围线围成的有界区域  $S$  也成立.

2° 平面区域的面积 以分段光滑的简单围线  $C$  为界的图形的面积  $S$  等于:

$$S = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

在这一节中, 若没有相反的约定, 则假定积分的封闭围线是简单的(无自交点), 并这样选取围线的正方向, 使得所围不含无穷远点的区域始终位于曲线的左边.

【4296】 利用格林公式变换曲线积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$$

式中围线  $C$  是有界区域  $S$  的边界.

解 此处  $P = \sqrt{x^2 + y^2}, Q = xy + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ .

从而, 
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2.$$

于是, 
$$I = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S y^2 dx dy.$$

注 这里应假定  $C$  不与  $Ox$  轴的左半部分(即  $x \leq 0, y = 0$ )相交, 从而, 这时在  $S$  中  $x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ .

【4297】 应用格林公式, 计算曲线积分

$$I = \oint_k (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

其中  $k$  是以  $A(1, 1), B(3, 2), C(2, 5)$  为顶点的三角形围线  $ABC$ , 并且积分时的环绕方向为正. 直接计算积分, 以验证所求得的结果.

解 如图 8.64 所示,  $AB, BC$  及  $CA$  的方程分别为

$$y = \frac{1}{2}(x+1), \quad y = -3x+11, \quad y = 4x-3.$$

由于  $P = (x+y)^2, Q = -(x^2 + y^2)$ . 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2(x+y) = -4x - 2y.$$

通过顶点  $C$  引直线垂直于  $Ox$  轴, 它把三角形域  $S$  分成  $S_1$  和  $S_2$  两部分. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (-4x - 2y) dx dy = \iint_{S_1} (-4x - 2y) dx dy + \iint_{S_2} (-4x - 2y) dx dy \\ &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x - 2y) dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (-4x - 2y) dy \\ &= \int_1^2 \left( -\frac{119}{4}x^2 + \frac{77}{2}x - \frac{35}{4} \right) dx + \int_2^3 \left( \frac{21}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{483}{4} \right) dx \\ &= -\frac{245}{12} - \frac{105}{4} = -46\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

如果直接计算, 则

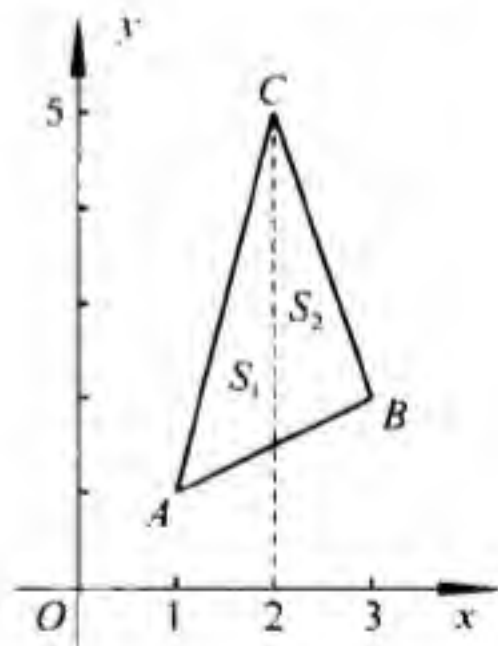


图 8.64

$$\begin{aligned}
I &= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \\
&= \int_1^3 \left[ \left( x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] dx + \int_3^2 [(x-3x+11)^2 - (-3) \\
&\quad \cdot (x^2 + 9x^2 - 66x + 121)] dx + \int_2^1 [(x+4x-3)^2 - 4(x^2 + 16x^2 - 24x + 9)] dx \\
&= \int_1^3 \left( \frac{13}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{8} \right) dx + \int_3^2 (34x^2 - 242x + 484) dx + \int_2^1 (-43x^2 + 66x - 27) dx \\
&= \frac{58}{3} - \frac{283}{3} + \frac{85}{3} = -46 \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

应用格林公式, 计算下列曲线积分:

【4298】  $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$ , 式中  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ .

解 由于  $P = -x^2 y, Q = xy^2$ , 故有

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

如果直接计算, 可令  $x = a \cos t, y = a \sin t$ , 则

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = a^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t) dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{2}.$$

【4299】  $\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy$ , 式中  $C$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

解 由于  $P = x+y, Q = -(x-y)$ , 故有

$$\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (-1-1) dx dy = -2\pi ab.$$

如果直接计算, 则

$$\begin{aligned}
\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t) - (a \cos t - b \sin t)(b \cos t)] dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(b^2 - a^2) \cos t \sin t - ab] dt = -2\pi ab.
\end{aligned}$$

【4300】  $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$ , 其中  $C$  为区域  $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$  的边界, 并且积分时的围绕方向为正.

解 由于  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x (\sin y - y) - e^x \sin y = -ye^x$ ,

故有  $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy] = - \iint_{\substack{0 < x < \pi \\ 0 < y < \sin x}} ye^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \left( \int_0^\pi e^x dx - \int_0^\pi e^x \cos 2x dx \right) \\
&= -\frac{1}{4} \left[ (e^\pi - 1) - \frac{\cos 2x + 2 \sin 2x}{5} e^x \right]_0^\pi = -\frac{1}{5} (e^\pi - 1).
\end{aligned}$$

【4301】  $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$ .

解 由于  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)} [(-2x \sin 2xy + 2y \cos 2xy) - (2y \cos 2xy - 2x \sin 2xy)] = 0$ ,

故有  $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 0 dx dy = 0$ .

【4302】 设  $AmB$  为连接点  $A(1,1)$  和点  $B(2,6)$  的直线段,  $AnB$  是连接点  $A, B$  及坐标原点的抛物线

段,且该抛物线的轴垂直于  $x$  轴. 积分

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

相差多少?

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(x-y) - 2(x+y) = -4x,$$

故  $I_1$  与  $I_2$  之差为(利用格林公式)

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \oint_{AmBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \iint_S (-4x) dx dy = \int_1^2 dx \int_{2x^2-x}^{3x-4} (-4x) dy \\ &= - \int_1^2 4x(-2x^2+6x-4) dx = (2x^4-8x^3+8x^2) \Big|_1^2 = -2, \end{aligned}$$

或  $I_1 - I_2 = 2$ .

**【4303】** 计算曲线积分  $\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ ,

其中  $AmO$  为由点  $A(a, 0)$  至点  $O(0, 0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$ .

提示 在  $Ox$  轴上连接点  $O(0, 0)$  与点  $A(a, 0)$ , 这样, 便构成封闭的半圆形  $AmOA$ , 利用格林公式即易获解.

解 在  $Ox$  轴上连接点  $O(0, 0)$  与点  $A(a, 0)$ , 这样, 便构成封闭的半圆形  $AmOA$ , 且在线段  $OA$  上,

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0.$$

从而,  $\oint_{AmOA} = \int_{AmO} + \int_{OA} = \int_{AmO}$ . 另一方面, 利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \iint_{x^2+y^2 \leq ax} m dx dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

于是,  $\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$

**【4304】** 计算曲线积分  $\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy$ ,

式中  $\varphi(y)$  和  $\varphi'(y)$  为连续函数,  $AmB$  为连接点  $A(x_1, y_1)$  和点  $B(x_2, y_2)$  的任意路径, 但要求此路径与线段  $AB$  一起围成具有已知面积  $S$  的区域  $AmBA$ .

提示 连接点  $B$  与点  $A$ , 构成封闭围线  $AmBA$ , 利用格林公式并注意

$$\int_{BA} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy = \int_{BA} d[e^x \varphi(y)] - \int_{BA} m(y dx + dy)$$

即易获解. 利用此题的结果可计算 4303 题.

解 首先, 我们有  $\oint_{AmBA} = \int_{AmB} + \int_{BA}$ , 而

$$\oint_{AmBA} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy = \iint_S m dx dy = mS.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_{BA} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy &= \int_{BA} d[e^x \varphi(y)] - \int_{BA} m(y dx + dy) \\ &= e^x \varphi(y) \Big|_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} - m \int_{x_2}^{x_1} \left[ y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] dx \\ &= e^{x_1} \varphi(y_1) - e^{x_2} \varphi(y_2) - m \left( y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_1 - x_2) + \frac{m}{2} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1)^2 \\ &= e^{x_1} \varphi(y_1) - e^{x_2} \varphi(y_2) + m(y_2 - y_1) + \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1). \end{aligned}$$

于是,  $\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy$



$$= mS + e^{r_2} \varphi(y_2) - e^{r_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1).$$

注 利用此题的结果可计算 4303 题. 事实上, 由于  $\varphi(y) = \sin y$ ,  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0$ ,  $x_2 = y_2 = 0$ ,  $S = \frac{\pi a^2}{8}$ , 代入即得

$$\int_{\Lambda(a)} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

【4305】 求二阶可微的两个连续函数  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$ , 使得曲线积分

$$I = \oint_C P(x+a, y+\beta) dx + Q(x+a, y+\beta) dy$$

对于任何封闭的围线  $C$  与常数  $a$  和  $\beta$  无关.

解 由格林公式, 得

$$I = \iint_S \left[ \frac{\partial Q(x+a, y+\beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x+a, y+\beta)}{\partial y} \right] dx dy = \tau. \quad (1)$$

由假定  $\tau$  为一常数, 它与  $a, \beta$  无关 (只与围线  $C$  有关), 上式中的  $S$  表围线  $C$  所围成的闭区域. 由假定  $P, Q$  具有连续的二阶偏导数, 故 (1) 式中二重积分的被积函数具有关于  $a, \beta$  的一阶连续偏导数. 因此, 可以在积分号下关于  $a, \beta$  求偏导数, 得

$$\iint_S \left[ \frac{\partial^2 Q(x+a, y+\beta)}{\partial a \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+a, y+\beta)}{\partial a \partial y} \right] dx dy = \frac{\partial}{\partial a} \tau = 0. \quad (2)$$

$$\iint_S \left[ \frac{\partial^2 Q(x+a, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+a, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} \right] dx dy = \frac{\partial}{\partial \beta} \tau = 0. \quad (3)$$

于是, (2) 式和 (3) 式对任何  $a, \beta$  以及任何  $S$  都成立. 再注意到 (2) 式和 (3) 式中二重积分的被积函数都是连续的, 故被积函数必恒为零 (参看 4097 题, 此题对二重积分也成立):

$$\frac{\partial^2 Q(x+a, y+\beta)}{\partial a \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+a, y+\beta)}{\partial a \partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+a, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+a, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} = 0. \quad (5)$$

(对任何  $x, y, a, \beta$ ), 记  $x+a=u, y+\beta=v$ , 显然有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q(x+a, y+\beta)}{\partial a \partial x} &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 P(x+a, y+\beta)}{\partial a \partial y} &= \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v}, \\ \frac{\partial^2 Q(x+a, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u}, & \frac{\partial^2 P(x+a, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} &= \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

于是, (4) 式与 (5) 式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right] &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right] &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2} = 0 \end{aligned}$$

(对任何  $u, v$ ), 由此可知:  $\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = k$  (常数).

将  $u, v$  改记为  $x, y$  则上式为

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = k \text{ (常数)}. \quad (6)$$

令  $u(x, y) = \int_0^x P(t, y) dt$ , 则  $u(x, y)$  具有连续的二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y). \quad (7)$$

由 (6) 式知:  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = k + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = k + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) = k + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right).$

两端积分, 得

$$Q(x, y) = kx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \varphi(y), \quad (8)$$

其中  $\varphi(y)$  为具有二阶连续导数的任意函数. 由(7), (8)两式又知  $u(x, y)$  具有连续的三阶偏导数.

反之, 若  $u(x, y)$  是任一具有三阶连续偏导数的函数, 而  $\varphi(y)$  是任一具有二阶连续导数的函数, 则由(7)式和(8)式确定的  $P(x, y)$  与  $Q(x, y)$  必具连续二阶偏导数, 且使(6)式成立, 从而使

$$\begin{aligned} I &= \oint_C P(x+\alpha, y+\beta) dx + Q(x+\alpha, y+\beta) dy = \iint_S \left[ \frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \iint_S k dx dy = kS, \end{aligned}$$

故  $I$  是与  $\alpha, \beta$  无关的常数(对于任意固定的  $C$ ).

综上所述, 可知: 使曲线积分  $I$  对于任何封闭围线  $C$  与常数  $\alpha, \beta$  无关的二阶连续可微函数  $P(x, y)$  与  $Q(x, y)$  的全体由公式(7)与(8)给出, 其中  $k$  为常数,  $u(x, y)$  为三阶连续可微的任一函数,  $\varphi(y)$  为二阶连续可微的任意一个一元函数.

**【4306】** 为了使曲线积分  $\int_{\Lambda \text{ 或 } B} F(x, y)(y dx + x dy)$  与积分路径的形状无关, 可微函数  $F(x, y)$  应满足怎样的条件?

**解** 由于  $P = yF(x, y), Q = xF(x, y)$ , 故由格林公式知所求的条件为  $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$ , 即

$$xF'_x(x, y) = yF'_y(x, y).$$

**【4307】** 计算

$$I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

其中  $C$  为不经过坐标原点的简单封闭围线, 且积分时的环绕方向为正.

**提示** 研究两种情况: (1) 坐标原点在围线  $C$  之外, (2) 围线  $C$  包围坐标原点.

**解** 令  $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . 易知, 当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时, 恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线  $C$  之外, 这时, 在由  $C$  围成的有界闭区域  $S$  上,  $P$  与  $Q$  以及它们的偏导数都连续, 故可应用格林公式, 得

$$I = \oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

(2) 围线  $C$  包围坐标原点. 这时, 由于  $P, Q$  在原点无定义, 故不能直接对由  $C$  围成的区域应用格林公式. 今取  $a > 0$  充分小, 使中心在原点半径为  $a$  的圆周  $L_a (L_a: x^2 + y^2 = a^2)$  完全位于围线  $C$  之内. 用  $S_a$  表介于  $C$  和  $L_a$  之间的环形闭区域. 显然, 在  $S_a$  上,  $P, Q$  及其偏导数均连续, 故可应用格林公式, 得

$$\left( \oint_C + \oint_{-L_a} \right) P dx + Q dy = \iint_{S_a} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

其中  $-L_a$  表沿  $L_a$  的负方向(即顺时针方向).

于是,  $I = \oint_C P dx + Q dy = \oint_{L_a} P dx + Q dy$ , 其中  $L_a$  沿正方向(即逆时针方向). 利用  $L_a$  的参数方程  $x = a \cos t, y = a \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 即得

$$I = \oint_{L_a} P dx + Q dy = \oint_{L_a} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(a \cos t) - a \sin t(-a \sin t)] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

利用曲线积分计算由下列曲线所围的面积:

**【4308】** 椭圆  $x = a \cos t, y = b \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

**解** 面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$



**【4309】** 星形线  $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$ .

解 面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt = \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi ab$ .

**【4310】** 抛物线  $(x+y)^2 = ax (a > 0)$  和轴  $Ox$ .

解题思路 令  $y = tx$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, \quad y = \frac{at}{(1+t)^2} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

它与  $Ox$  轴的交点为  $(a, 0)$  及  $(0, 0)$ .

注意在  $Ox$  轴上从点  $(0, 0)$  到点  $(a, 0)$  的一段上, 有  $x dy - y dx = 0$ ; 而在抛物线这一段上, 则有

$$x dy - y dx = \frac{a^2}{(1+t)^4} dt \quad (0 \leq t \leq +\infty),$$

从而, 问题易获解.

解 作代换  $y = tx$ , 则原方程化为  $x^2(1+t)^2 = ax$ . 从而, 曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, \quad y = \frac{at}{(1+t)^2} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

它与  $Ox$  轴的交点为  $(a, 0)$  与  $(0, 0)$ . 在  $Ox$  轴上从点  $(0, 0)$  到点  $(a, 0)$  的一段上, 有

$$x dy - y dx = 0.$$

在抛物线上, 有

$$x dy - y dx = \frac{a^2}{(1+t)^4} dt.$$

于是, 面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^4} = -\frac{a^2}{6} \frac{1}{(1+t)^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{a^2}{6}$ .

**【4311】** 笛卡儿叶形线  $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$ .

解题思路 令  $y = tx$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (0 \leq t \leq +\infty),$$

且有  $x dy - y dx = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t \leq +\infty)$ . 从而, 问题可获解.

解 作代换  $y = tx$ , 则得曲线的参数方程为  $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ .

由于  $dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt, dy = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} dt$ , 从而,  $x dy - y dx = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt$ .

于是, 面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3a^2}{2} \left[ -\frac{1}{1+t^3} \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}$ .

**【4312】** 双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

解题思路 利用极坐标  $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ , 得双纽线的方程为  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ , 故有

$$x = a\cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a\sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

及在曲线上,  $x dy - y dx = a^2 \cos 2\varphi d\varphi$ ; 在  $Ox$  轴上,  $x dy - y dx = 0$ .

注意, 对应于  $\frac{1}{4}$  的面积 (第一象限内) 部分有  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ . 从而, 问题易获解.

解 考虑到对称性, 只需求曲线所围的区域的  $\frac{1}{4}$  面积 (位于第一象限). 利用极坐标  $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ , 得双纽线的方程为  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ , 故

$$x = a\cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a\sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

从而, 在曲线上  $x dy - y dx = a^2 \cos 2\varphi d\varphi$ ; 在  $Ox$  轴上,  $x dy - y dx = 0$ , 且  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 于是, 面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2.$$

**【4313】** 曲线  $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$  及坐标轴.



**解题思路** 令  $y=tx$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

曲线的起点为  $(1,0)$ , 终点为  $(0,1)$ . 注意在曲线段上, 有

$$xdy - ydx = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t < +\infty);$$

而在  $Oy$  轴上从点  $(0,1)$  到点  $(0,0)$  一段, 以及在  $Ox$  轴上从点  $(0,0)$  到点  $(1,0)$  的一段上, 均有  $xdy - ydx = 0$ . 再注意利用 3853 题的结果, 问题即可获解.

**解** 作代换  $y=tx$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

曲线的起点为  $(1,0)$ , 终点为  $(0,1)$ . 在曲线段上,

$$xdy - ydx = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t < +\infty).$$

在  $Oy$  轴上从点  $(0,1)$  到  $(0,0)$  一段, 以及在  $Ox$  轴上从点  $(0,0)$  到点  $(1,0)$  一段上, 均有  $xdy - ydx = 0$ . 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^3)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} B\left(2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} B(1, 1) + \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}\right) \right]^{(1)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3853 题的结果.

**【4314】** 计算由曲线  $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m$  ( $a>0, n>0, m>0$ ) 所围的面积.

**解题思路** 令  $y=tx$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, \quad y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

注意  $xdy - ydx = \frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} t \quad (0 \leq t < +\infty)$ , 并利用 3852 题的结果, 问题即可获解.

**解** 作代换  $y=tx$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, \quad y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

从而,

$$xdy - ydx = \frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt \quad (0 \leq t < +\infty)$$

于是, 面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt = \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1)^{(1)}$ .

\* ) 利用 3852 题的结果.

**【4315】** 计算由曲线  $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$  ( $a>0, b>0, n>0$ ) 和坐标轴所围的面积.

**解题思路** 令  $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$ ,  $y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ), 即得

$$xdy - ydx = \frac{2}{n} ab \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \quad (\text{在曲线上}).$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 及点 $(0, b)$ . 注意在  $Oy$  轴上从点 $(0, b)$ 到点 $(0, 0)$ 的一段, 以及在  $Ox$  轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 的一段上, 均有  $x dy - y dx = 0$ . 再注意利用 3856 题的结果, 问题即可获解.

解 作代换  $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$ ,  $y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ), 即得

$$x dy - y dx = \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 和点 $(0, b)$ . 在  $Oy$  轴上, 从点 $(0, b)$ 到点 $(0, 0)$ 一段, 以及在  $Ox$  轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 一段上, 显然有  $x dy - y dx = 0$ . 于是, 面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi = \frac{ab}{n} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^{*)} = \frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

\* ) 利用 3856 题的结果.

**【4316】** 计算由曲线  $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$  ( $a > 0, b > 0, n > 1$ ) 和坐标轴所围的面积.

解题思路 令  $y = \frac{b}{a}xt$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n}, \quad y = \frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n} \quad (0 < t < +\infty).$$

易知在两坐标轴上, 有  $x dy - y dx = 0$ ; 及在曲线上, 有  $x dy - y dx = ab \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt$  ( $0 < t < +\infty$ ), 并利用 3853 题的结果, 问题即可获解.

解 作代换  $y = \frac{b}{a}xt$  即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n}, \quad y = \frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n} \quad (0 < t < +\infty).$$

易知

$$x dy - y dx = ab \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt.$$

又在两坐标轴上, 显然有  $x dy - y dx = 0$ . 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{ab}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt \\ &= \frac{ab}{2} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^n)^2} dt \right] \\ &= \frac{ab}{2} \left[ \frac{1}{n} B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} B(1, 1) + \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \right]^{*)} \\ &= \frac{ab}{n} \left[ 1 + B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{ab}{n} \left[ 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} \right] = \frac{ab}{n} \left[ 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right]. \end{aligned}$$

\* ) 利用 3853 题的结果.

**【4317】** 计算由曲线  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$  ( $a > 0, b > 0, c > 0, n > 0$ ) 所围的面积.

提示 仿 4316 题.

解 作代换  $y = \frac{b}{a}xt$ , 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{act^n}{1+t^{2n+1}}, \quad y = \frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

易知  $x dy - y dx = \frac{abc^2 t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt$ . 于是, 面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{abc^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt = -\frac{abc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+t^{2n+1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$



**【4318】** 一个半径为  $r$  的圆周沿半径为  $R$  的固定圆周外部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为外摆线. 假定比值  $\frac{R}{r} = n$  是整数 ( $n \geq 1$ ), 求外摆线所围的面积. 研究特殊情况  $r = R$  (心脏线).

**解** 取定圆的中心  $O$  作坐标原点, 取  $Ox$  轴通过点  $A$ , 点  $A$  是动点的始点, 即为两圆的公切点时的位置 (图 8.65). 当动圆滚到如图的新位置时, 点  $A$  移到点  $M$ . 动点  $M$  的轨迹便是外摆线, 其方程推导如下: 设动圆的圆心为  $C$ , 两圆的切点为  $B$ , 记  $\angle MCB = t$  (运动开始时, 设  $t$  等于零). 切点在定圆上所移过的弧  $\widehat{AB}$  应等于它在动圆上所移过的弧  $\widehat{MB}$ , 即

$$R \cdot \angle AOB = \frac{R}{n} \cdot \angle MCB = \frac{R}{n} t.$$

从而,  $\angle AOB = \frac{t}{n}$ , 设动点  $M$  的坐标为  $(x, y)$ , 则

$$x = OG = OE + FM = \left(R + \frac{R}{n}\right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \sin \angle FCM,$$

但  $\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE$ , 且  $\angle OCE = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{n}$ , 从而,

$$\angle FCM = \left(1 + \frac{1}{n}\right)t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin \angle FCM = -\cos \left(1 + \frac{1}{n}\right)t.$$

于是, 最后得  $x = R \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \cos \left(1 + \frac{1}{n}\right)t$ .

类似地, 可求得  $y = R \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin \left(1 + \frac{1}{n}\right)t$ .

若记  $\varphi = \frac{t}{n}$ , 并注意到  $R = nr$ , 则外摆线可用如下的参数方程表示:

$$x = (n+1)r \cos \varphi - r \cos(n+1)\varphi, \quad y = (n+1)r \sin \varphi - r \sin(n+1)\varphi.$$

由  $R = nr$  知, 当动圆滚  $n$  圈后, 起点与终点重合, 即  $\varphi$  的变化范围为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 注意到

$$x dy - y dx = r^2 (n+1)(n+2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

于是, 所求的面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{r^2 (n+1)(n+2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi = \pi r^2 (n+1)(n+2)$ .

特别是, 当  $r = R$  时, 即  $n = 1$ , 则得心脏线的面积为  $S = 6\pi r^2$ .

**【4319】** 一个半径为  $r$  的圆周沿半径为  $R$  的固定圆周内部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为内摆线. 假定比值  $\frac{R}{r} = n$  是整数 ( $n \geq 2$ ), 求内摆线所围的面积. 研究特殊情况  $r = \frac{R}{4}$  (星形线).

**解** 仿上题, 容易求得内摆线的参数方程为

$$x = R \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \cos \left(1 - \frac{1}{n}\right)t, \quad y = R \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin \left(1 - \frac{1}{n}\right)t.$$

若以  $\varphi = \frac{t}{n}$  为参数, 并注意到  $R = nr$ , 则得

$$x = (n-1)r \cos \varphi + r \cos(n-1)\varphi, \quad y = (n-1)r \sin \varphi - r \sin(n-1)\varphi.$$

注意到

$$x dy - y dx = r^2 (n-1)(n-2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

于是, 所求的面积为  $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{r^2 (n-1)(n-2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi = \pi r^2 (n-1)(n-2)$ .

特别是, 当  $\frac{R}{r} = 4$  时, 即  $n = 4$ , 则得星形线所围的面积为  $S = 6\pi r^2$ .

**【4320】** 计算圆柱面  $x^2 + y^2 = ax$  被曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  所截那部分的面积.

**解** 两曲面的交线为  $x^2 + y^2 = ax, \quad z^2 = a^2 - ax$ .

若将平面  $Oxy$  上的圆周  $x^2 + y^2 = ax$  记以  $C$ , 其弧长记以  $s$ , 则所求的面积显然可表为

$$S = 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} ds.$$

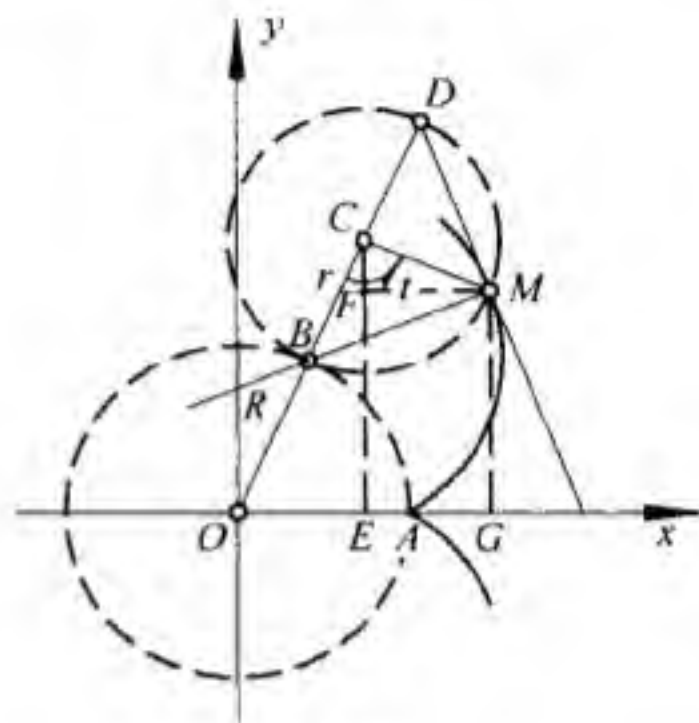


图 8.65



由于  $x^2 + y^2 = ax$  即为  $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ , 故令

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{2} \sin \varphi,$$

从而, 弧长的微分为  $ds = \frac{a}{2} d\varphi$ . 于是, 面积为

$$S = 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} \, ds = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a}{2}(1 - \cos \varphi)} \cdot \frac{a}{2} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} a^2 \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a^2.$$

【4321】 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}.$$

若  $X = ax + by, Y = cx + dy$ , 且  $C$  为包围坐标原点的简单封闭围线 ( $ad - bc \neq 0$ ).

解 首先注意, 由于  $ad - bc \neq 0$ , 故只有原点  $(0, 0)$  使  $X^2 + Y^2 = 0$ . 易知

$$XdY - YdX = (ax + by)(cdx + ddy) - (cx + dy)(adx + bdy) = (ad - bc)(xdy - ydx),$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中

$$P = -\frac{(ad - bc)y}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}, \quad Q = \frac{(ad - bc)x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(ad - bc)[(a^2 + c^2)x^2 - (b^2 + d^2)y^2]}{[(ax + by)^2 + (cx + dy)^2]^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0) \text{ 时}),$$

故由格林公式知

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{C'} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中  $C'$  可为包围原点  $(0, 0)$  的任一位于  $C$  内的围线. 特别是, 可取  $C'$  为围线  $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = r^2$  (即  $X^2 + Y^2 = r^2$ ),  $r > 0$  充分小. 于是, 得 (利用格林公式)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} XdY - YdX = \frac{ad - bc}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} xdy - ydx \\ &= \frac{ad - bc}{2\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} 2dx dy = \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(X, Y)} \right| dXdY. \end{aligned}$$

由于  $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = ad - bc$ , 故  $\frac{D(x, y)}{D(X, Y)} = \frac{1}{ad - bc}$ . 于是, 代入上式得

$$I = \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} \frac{1}{|ad - bc|} dXdY = \frac{ad - bc}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{|ad - bc|} \pi r^2 = \text{sgn}(ad - bc).$$

【4322】 若简单的围线  $C$  包围坐标原点,  $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$ , 而曲线  $\varphi(x, y) = 0$  和  $\psi(x, y) = 0$  在围线  $C$  以内有几个单交点, 计算积分  $I$  (参阅 4321 题).

解 设  $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$  在  $C$  内的交点为  $P_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ . 首先注意, 本题应假定函数  $\varphi(x, y)$  与  $\psi(x, y)$  在  $C$  围成的区域内具有连续的二阶偏导数, 并且在各点  $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$  处有  $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x \neq 0$ . 容易算得

$$XdY - YdX = (\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi)dx + (\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi)dy,$$

从而,

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中

$$P = \frac{\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi}{\varphi^2 + \psi^2}, \quad Q = \frac{\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi}{\varphi^2 + \psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{(\varphi^2 + \psi^2)^2} [(\varphi\psi'' - \varphi''\psi)(\varphi^2 + \psi^2) - (\varphi'\psi'_x + \varphi'_x\psi')\varphi^2 + (\varphi'_x\psi'_x + \varphi'_x\psi'_y)\psi^2 + 2(\varphi'_x\varphi'_y - \psi'_x\psi'_y)\varphi\psi]$$

$$((x, y) \neq (x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, m)).$$

围绕点  $P_i(x_i, y_i)$  作围线  $C_i: [\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = r^2$  (即  $X^2 + Y^2 = r^2$ ), 取  $r > 0$  充分小, 使诸  $C_i$  互不相交且都位于  $C$  内 (这是办得到的, 因为在各点  $P_i, \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$ , 从而, 由连续性知, 在  $P_i$  的某邻域内  $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$  且保持定号, 于是, 根据隐函数存在定理知, 变换  $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$  在点  $(x, y) = (x_i, y_i)$  邻近及点  $(X, Y) = (0, 0)$  邻近是双方单值双方连续的), 并使  $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$  在  $P_i$  的邻近  $X^2 + Y^2 \leq r^2$  (记为  $S_i$ ) 上保持定号, 将格林公式应用于诸围线  $C, C_1, \dots, C_m$  之间的区域, 可得

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{但} \quad \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} &= \frac{1}{r^2} \oint_{C_i} XdY - YdX = \frac{1}{r^2} \oint_{C_i} (\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi)dx + (\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi)dy \\ &= \frac{1}{r^2} \iint_{S_i} 2(\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x)dx dy = \frac{2}{r^2} \iint_{S_i} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy = \frac{2}{r^2} \left( \operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \iint_{S_i} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy \\ &= \frac{2}{r^2} \left( \operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} dXdY = \frac{2}{r^2} \left( \operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \cdot \pi r^2 = 2\pi \left( \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{P_i}, \end{aligned}$$

代入(1)式, 即得

$$I = \sum_{i=1}^m \left( \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{P_i},$$

或写为

$$I = \sum \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)},$$

其中  $\sum$  的是对曲线  $\varphi(x, y) = 0$  与  $\psi(x, y) = 0$  在  $C$  内的各交点相加.

注 显然, 4321 题是 4322 题的特例, 这时, 曲线  $ax + by = 0$  与  $cx + dy = 0$  在  $C$  内只有一个交点, 即原点  $(0, 0)$ , 而  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = ad - bc$ .

【4323】 证明: 若  $C$  为封闭围线,  $l$  为任意的方向, 则有

$$\oint_C \cos(l, n) ds = 0,$$

式中  $n$  为围线  $C$  的外法向量.

证 如图 8.66 所示, 不妨规定  $C$  的方向为逆时针的, 以  $t$  表示. 由于夹角

$$(l, n) = (l, x) - (n, x),$$

故得  $\cos(l, n) = \cos(l, x)\cos(n, x) + \sin(l, x)\sin(n, x)$ ,

但是,  $\sin(n, x) = \sin\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(t, x)$ ,

$$\cos(n, x) = \cos\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(t, x),$$

且  $\cos(t, x) = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin(t, x) = \frac{dy}{ds}$ , 因此, 有

$$\cos(l, n) ds = \cos(l, x) dy - \sin(l, x) dx.$$

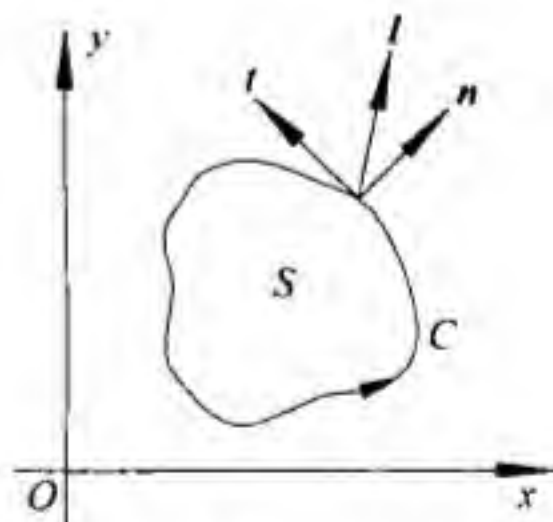


图 8.66



再利用格林公式,并注意到  $\sin(l, x)$  和  $\cos(l, x)$  均为常数,即得

$$\oint_C \cos(l, n) ds = \oint_C [-\sin(l, x) dx + \cos(l, x)] dy = \iint_S 0 dx dy = 0.$$

**【4324】** 求积分 
$$I = \oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds$$

之值,式中  $C$  为有界区域  $S$  的边界,它是简单封闭曲线,  $n$  为它的外法向量.

**解** 如 4323 题所述,已知

$$\cos(n, x) = \cos\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(t, x) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos(n, y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (n, x)\right] = \sin(n, x) = \sin\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是,

$$I = \oint_C x dy - y dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 2S,$$

这里  $S$  为封闭曲线  $C$  所围的面积.

**【4325】** 求 
$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \cdot n) ds,$$

其中  $S$  为包围点  $(x_0, y_0)$  的围线  $C$  所围的面积,  $d(S)$  为区域  $S$  的直径,  $n$  为围线  $C$  的单位外法向量,  $F(X, Y)$  为  $S+C$  上的连续可微向量.

**解** 由 4323 题的推导过程中知,向量  $n$  在坐标轴上的投影为

$$n_x = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是,

$$(F \cdot n) ds = (X n_x + Y n_y) ds = X dy - Y dx.$$

因此,利用格林公式有

$$\oint_C (F \cdot n) ds = \oint_C X dy - Y dx = \iint_S \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot S,$$

其中点  $(\xi, \eta) \in$  区域  $S$ . 于是,

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \cdot n) ds = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} = X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0).$$

### § 13. 曲线积分在物理学上的应用

**【4326】** 均匀分布在圆  $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$  的上半部的质量  $M$  以怎样的力吸引位于  $(0, 0)$  质量为  $m$  的质点?

**解** 由对称性知,引力在  $Ox$  轴上的投影  $X=0$ ,故只要计算引力在  $Oy$  轴上的投影.

设圆心角为  $\theta$ ,由  $ds = a d\theta$  知,对于长为  $ds$  一段圆弧吸引质量为  $m$  的质点的力在  $Oy$  轴上的投影为

$$dY = \frac{km}{a^2} \frac{M}{\pi a} \sin\theta \cdot a d\theta = \frac{kmM}{\pi a^2} \sin\theta d\theta.$$

其中  $k$  为引力常数.

于是,所求的引力在  $Oy$  轴上的投影为

$$Y = \frac{kmM}{\pi a^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2kmM}{\pi a^2}.$$

**【4327】** 计算单层的对数势 
$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中  $\kappa =$  常数,  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ , 设围线  $C$  是圆周  $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ .



解 由对称性知,单层的对数势为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2\kappa \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{r} \cdot R d\theta = 2R\kappa \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2R\rho \cos\theta + \rho^2}} d\theta \\ &= -R\kappa \int_0^{2\pi} \ln R^2 \left[ 1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta, \end{aligned}$$

其中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\xi x + \eta y = R\rho \cos\theta$ , 而  $\theta$  是向量  $r = xi + yj$  与  $r_0 = \xi i + \eta j$  的正向夹角.

利用 3733 题(或 2192 题)的结果,可得

$$\int_0^{2\pi} \ln \left[ 1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta = \begin{cases} 0, & \rho \leq R, \\ 2\pi \ln \frac{\rho}{R}, & \rho > R. \end{cases}$$

$$\text{于是,我们有 } u(x, y) = -2R\kappa \int_0^{2\pi} \ln R d\theta - R\kappa \int_0^{2\pi} \ln \left[ 1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta = \begin{cases} 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{R}, & \rho \leq R, \\ 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{\rho}, & \rho > R. \end{cases}$$

【4328】 采用极坐标  $\rho$  和  $\varphi$ , 计算单层的对数势

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi \quad \text{和} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi,$$

式中  $r$  为点  $(\rho, \varphi)$  与动点  $(1, \psi)$  间的距离,  $m$  为正整数.

解 由于

$$r = \sqrt{(\rho \cos\varphi - \cos\psi)^2 + (\rho \sin\varphi - \sin\psi)^2} = \sqrt{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2},$$

于是,当  $\rho < 1$  时,我们有

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln[1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2] d\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \cos(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \cos m\varphi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du + \frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \sin m\varphi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du. \end{aligned}$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以  $2\pi$  为周期的函数,并注意到奇偶函数在对称区间上的积分性质,则有

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du + \frac{\sin m\varphi}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ &= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du = -(\cos m\varphi) \left( -\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi. \end{aligned}$$

同理,我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln[1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2] d\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \sin(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ &= -\frac{\cos m\varphi}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du - \sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ &= -\sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du = -(\sin m\varphi) \left( -\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi. \end{aligned}$$

当  $\rho > 1$  时,则有

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \rho^2 \left( 1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\ &= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \left( 1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du = -(\cos m\varphi) \left( -\frac{\pi}{m\rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi. \end{aligned}$$

$$\text{同理,我们有 } I_2 = -\sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \left( 1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du = -(\sin m\varphi) \left( -\frac{\pi}{m\rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi.$$

对于  $\rho = 0$ , 显然有

$$I_1 = I_2 = 0.$$

现在来研究当  $\rho = 1$  的情况. 首先,积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

对于  $\rho$  在区间  $[1, 1+\delta]$  上是一致收敛的, 其中  $\delta$  为很小的正数. 事实上, 对于充分小的  $\eta$ , 当  $u$  在  $(0, \eta)$  内取值时, 有

$$1 > 1 - 2\rho\cos u + \rho^2 = (1-\rho)^2 + 2\rho(1-\cos u) \geq 2(1-\cos u) > 0.$$

于是, 当  $1 \leq \rho \leq 1+\delta, u \in (0, \eta)$  时, 有

$$|\cos mu \ln(1 - 2\rho\cos u + \rho^2)| \leq |\ln 2(1 - \cos u)|.$$

而积分  $\int_0^\eta |\ln 2(1 - \cos u)| du$  是收敛的. 这是由于当  $0 < 2\beta < 1$ , 有

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{2\beta} |\ln 2(1 - \cos u)| = \lim_{u \rightarrow 0} -[2(1 - \cos u)]^\beta \ln[2(1 - \cos u)] \frac{u^{2\beta}}{2^\beta(1 - \cos u)^\beta} = 0 \cdot 1 = 0.$$

于是, 积分

$$\int_0^\eta \cos mu \ln(1 - 2\rho\cos u + \rho^2) du$$

在  $1 \leq \rho \leq 1+\delta$  上一致收敛, 故知积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho\cos u + \rho^2) du$$

在  $1 \leq \rho \leq 1+\delta$  上一致收敛, 从而,  $I_1$  作为参数  $\rho=1$  的函数在  $\rho=1$  是右连续的. 由此, 根据上面已求出  $\rho > 1$

时  $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi$ , 得知: 当  $\rho=1$  时,

$$I_1 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi = \frac{\pi}{m} \cos m\varphi.$$

同理, 可得

$$I_2 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi = \frac{\pi}{m} \sin m\varphi.$$

综上所述, 得

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi, \quad 0 \leq \rho \leq 1;$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi, \quad \rho > 1.$$

\* ) 参看 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的“函数表与积分表”3.765 公式 1.

\*\* ) 根据上面公式, 当  $p^2 > 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(1 - 2p\cos x + p^2) \cos ax dx &= \int_0^\pi \ln p^2 \left(1 - 2\frac{1}{p}\cos x + \frac{1}{p^2}\right) \cos ax dx \\ &= \int_0^\pi 2\ln p \cdot \cos ax dx + \int_0^\pi \ln \left(1 - 2\frac{1}{p}\cos x + \frac{1}{p^2}\right) \cos ax dx \\ &= \int_0^\pi \ln \left(1 - 2\frac{1}{p}\cos x + \frac{1}{p^2}\right) \cos ax dx = -\frac{\pi}{a} p^{-a}, \end{aligned}$$

其中  $a$  为正整数.

**【4329】** 计算高斯积分 
$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds,$$

式中  $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$  为向量  $\mathbf{r}$  的长度, 此向量连接点  $A(x, y)$  和简单封闭光滑围线  $C$  上的动点  $M(\xi, \eta)$ ,  $(\mathbf{r}, \mathbf{n})$  为向量  $\mathbf{r}$  与曲线  $C$  在点  $M$  的外法向量  $\mathbf{n}$  之间的夹角.

解 设  $\mathbf{n}$  与  $Ox$  轴的夹角为  $\alpha$ ,  $\mathbf{r}$  与  $Ox$  轴的夹角为  $\beta$ , 则  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \alpha - \beta$ . 于是,

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\xi-x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta-y}{r} \sin \alpha.$$

代入高斯积分, 得

$$u(x, y) = \oint_C \left( \frac{\eta-y}{r^2} \sin \alpha + \frac{\xi-x}{r^2} \cos \alpha \right) ds = \oint_C \frac{\xi-x}{r^2} d\eta - \frac{\eta-y}{r^2} d\xi.$$

令  $P = -\frac{\eta-y}{r^2}$ ,  $Q = \frac{\xi-x}{r^2}$ , 则有

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{-(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{r^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{-(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{r^4},$$

因而  $P, Q$  的偏导数除去点  $A$  (此处  $r=0$ ) 外, 在全平面上是连续的, 并且  $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$ . 于是, 利用格林公式知: 当点  $A$  在曲线  $C$  之外时, 有

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = 0.$$

当点  $A$  在曲线  $C$  之内时, 则在曲线  $C$  内以  $A$  为圆心,  $R$  为半径作一圆  $l$ , 即得

$$u(x, y) = \oint_l \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \oint_l \frac{1}{R} ds = 2\pi.$$

当点  $A$  在曲线  $C$  上时, 不妨利用关系式  $\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = d\varphi$ , 其中  $d\varphi$  为从点  $A$  看曲线  $C$  上弧长的微分  $ds$  所张的角度. 今以  $A$  为圆心,  $r_1$  为半径作一小圆, 交  $C$  于  $B_1$  及  $B_2$  两点, 将曲线  $C$  除去小圆内的部分记以  $\widehat{B_1 B_2}$ , 则有

$$\int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \int_{\widehat{B_1 B_2}} d\varphi = \angle B_1 A B_2.$$

于是, 我们有  $u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \angle B_1 A B_2 = \pi.$

综上所述, 得高斯积分  $u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \begin{cases} 0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外,} \\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上,} \\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内.} \end{cases}$

\* ) 参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

【4330】 采用极坐标系  $\rho$  和  $\varphi$ , 计算双层的对数势

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi \quad \text{和} \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi,$$

式中  $r$  为点  $A(\rho, \varphi)$  和动点  $M(1, \psi)$  之间的距离,  $(\mathbf{r}, \mathbf{n})$  为方向  $\overrightarrow{AM} = \mathbf{r}$  与引自点  $O(0, 0)$  的半径  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{n}$  之间的夹角,  $m$  为正整数.

解 由题意知:

$$\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} = \frac{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)\cos\psi + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)^2 + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)^2} = \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}.$$

从而, 当  $\rho=1$  时,  $\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} = \frac{1}{2}$ . 又因  $m$  为正整数, 故此时有

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi = 0, \quad K_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi d\psi = 0.$$

当  $\rho < 1$  时, 因为级数 (利用 2968 题的结果)

$$\frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi)$$

在  $[0, 2\pi]$  上一致收敛, 乘  $\cos m(\psi - \varphi)$  和  $\sin m(\psi - \varphi)$  以后在  $[0, 2\pi]$  上也一致收敛, 故可逐项积分. 于是,

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos m(\psi - \varphi)\cos m\varphi - \sin m(\psi - \varphi)\sin m\varphi] \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi) \right] d\psi \\ &= \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos m(\psi - \varphi) \rho^m \cos m(\psi - \varphi) d\psi \\ &= \rho^m \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 m(\psi - \varphi) d\psi = \pi \rho^m \cos m\varphi. \end{aligned}$$

同理, 容易求得

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi = \pi \rho^m \sin m\varphi.$$

当  $\rho > 1$  时, 我们有



$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)]+(1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{(1-r^2)+[1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-r\cos(\psi-\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi = -\pi r^m \cos m\varphi = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi,
\end{aligned}$$

其中  $r=\rho^{-1}<1$ .

同理,可求得

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi.$$

综上所述,得

$$\begin{aligned}
K_1 &= \pi\rho^m \cos m\varphi, & K_2 &= \pi\rho^m \sin m\varphi, & \rho < 1, \\
K_1 &= K_2 = 0, & & & \rho = 1, \\
K_1 &= -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi, & K_2 &= -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi, & \rho > 1.
\end{aligned}$$

**【4331】** 若  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 则称二阶可微函数  $u = u(x, y)$  为调和函数, 证明: 当且仅当以下条件成立时,  $u$  才是调和函数:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

式中  $C$  为任意封闭围线,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为沿此围线之外法线方向的导数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\mathbf{n}, x),$$

而(参看 4323 题的推导)

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \sin(\mathbf{n}, x) = -\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式(注意, 题中应假定  $u(x, y)$  具有连续的二阶偏导数), 得

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \iint_S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_S (\Delta u) dx dy,$$

其中  $S$  表由封闭曲线  $C$  围成的区域. 由此式知:  $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$  (对任何封闭围线  $C$ ) 当且仅当  $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$

(对任何区域  $S$ ). 但易知这又相当于  $\Delta u \equiv 0$ . 事实上, 若  $\Delta u \equiv 0$ , 则对任何  $S$ , 有  $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$ ; 反之, 若对任

何  $S$ , 有  $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$ , 则必  $\Delta u \equiv 0$ . 因为, 若不然, 在某点  $(x_0, y_0)$ ,  $\Delta u \neq 0$ . 例如, 设在此点,  $\Delta u > 0$ , 则由连

续性可知, 必存在以  $(x_0, y_0)$  为中心, 半径为  $r_0$  (充分小) 的圆域  $S_0$ , 使在其上每一点, 都有  $\Delta u > 0$ . 由此可知,  $\iint_{S_0} (\Delta u) dx dy > 0$ . 矛盾, 证毕.

**【4332】** 证明: 
$$\iint_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

式中光滑曲线  $C$  是有界区域  $S$  的边界.

证 由于

$$\begin{aligned}
\oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C u \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\mathbf{n}, x) \right] ds = \oint_C u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u \frac{\partial u}{\partial y} dx \\
&= \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_S u \Delta u dx dy + \iint_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,
\end{aligned}$$

故得

$$\iint_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

**【4333】** 证明:若一函数在有界区域  $S$  内及其边界  $C$  上为调和函数,则此函数单值地由它在边界  $C$  上的值确定(参考 4332 题).

**证** 由题意知,我们只要证明:如有有界区域  $S$  上的两个调和函数  $u_1$  和  $u_2$ ,在其边界  $C$  上有相同的数值,则它们在整个区域上恒等.这也就是要证明:若调和函数  $u = u_1 - u_2$  在边界  $C$  上等于零,则它在整个区域上恒为零.事实上,利用 4332 题的结果,得

$$\iint_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

于是,在整个区域  $S$  上,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

这表明,在  $S$  上  $u$  为常数,但在边界  $C$  上  $u = 0$ ,故在区域  $S$  上  $u \equiv 0$ ,即  $u_1 = u_2$ .

**【4334】** 证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

式中光滑围线  $C$  是有界区域  $S$  的边界,  $\frac{\partial}{\partial n}$  为沿  $C$  的外法线方向的导数.

**证** 我们有

$$\begin{aligned} \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C v \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(n, x) \right] ds = \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &= \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S v \Delta u dx dy. \end{aligned}$$

同理,有

$$\begin{aligned} \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds &= \oint_C u \frac{\partial v}{\partial x} dy - u \frac{\partial v}{\partial y} dx = \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S u \Delta v dx dy. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds = \oint_C \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \iint_S v \Delta u dx dy - \iint_S u \Delta v dx dy = \iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy.$$

**【4335】** 利用格林第二公式证明:若  $u = u(x, y)$  是有界闭区域  $S$  内的调和函数,则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中  $C$  为区域  $S$  的边界,  $n$  为围线  $C$  的外法向量,  $(x, y)$  为区域  $S$  的内点,  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$  为点  $(x, y)$  与围线  $C$  上的动点  $(\xi, \eta)$  之间的距离.

**提示** 从区域  $S$  中除去点  $(x, y)$  与该点的无穷小的圆形邻域,并对区域  $S$  的剩余部分(图 8.67 中的区域  $S'$ )应用格林第二公式.

**证** 先证  $v = \ln r$  为  $(\xi, \eta)$  ( $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ ) 的调和函数.事实上,我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}. \end{aligned}$$

因此,  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$ , 即  $\Delta v = 0$ .

今以点  $(x, y)$  (当  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$  时) 为中心,  $\rho$  为半径画一圆  $C_0$ , 使此圆包含在围线  $C$  内,  $C$  及  $C_0$  的正向如图 8.67 所示. 曲线  $C$  的法线向外,  $C_0$  的法线指向点  $(x, y)$ . 因此, 在  $C_0$  上, 我们有

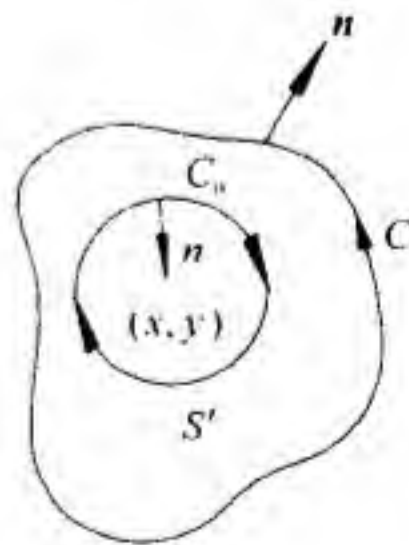


图 8.67



$$\left. \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right|_{r=\rho} = - \left. \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right|_{r=\rho} = - \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = - \frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由  $C_0$  及  $C$  所围的区域  $S'$  上去, 即得

$$\iint_{S'} \left| \frac{\Delta u}{u} \quad \frac{\Delta \ln r}{\ln r} \right| d\xi d\eta = \oint_{C_0+C} \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial n}}{u} \quad \frac{\frac{\partial \ln r}{\partial n}}{\ln r} \right| ds,$$

由于  $\Delta \ln r = 0, \Delta u = 0$ , 故得

$$\oint_{C_0+C} \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial n}}{u} \quad \frac{\frac{\partial \ln r}{\partial n}}{\ln r} \right| ds = 0.$$

将行列式展开, 并利用曲线积分的性质, 即得

$$\oint_C \left( \ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds = - \oint_{C_0} \left( \ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds.$$

但由于

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \left( \ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds &= \oint_{C_0} \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} ds - \oint_{C_0} u \left( -\frac{1}{\rho} \right) ds = 0 \cdot \ln \rho^{**}) + \frac{1}{\rho} \oint_{C_0} u ds \\ &= \frac{1}{\rho} u(\xi', \eta') \oint_{C_0} ds^{**}) = 2\pi u(\xi', \eta'), \end{aligned}$$

其中  $u(\xi', \eta')$  为  $u$  在圆  $C_0$  上某点的值, 故得

$$u(\xi', \eta') = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

两端令  $\rho \rightarrow +0$  取极限, 并注意到函数  $u$  在点  $(x, y)$  的连续性, 即得

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

\* ) 利用 4331 题的结果.

\*\* ) 利用第一型曲线积分的中值定理, 其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

**【4336】** \* ) 证明对于调和函数  $u(M) = u(x, y)$  的中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds,$$

式中  $C_\rho$  是以点  $M$  为中心  $\rho$  为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果(取  $C$  为  $C_\rho$ ), 得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds;$$

但在  $C_\rho$  上, 有  $r = \rho$ ,

$$\left. \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right|_{r=\rho} = \left. \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho},$$

由此, 再注意到  $\oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$  (这是利用 4331 题的结果), 得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left( \frac{u}{\rho} - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u ds - \frac{\ln \rho}{2\pi} \oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds.$$

证毕.

\* ) 原题中漏掉了  $\rho$ , 即应将  $\frac{1}{2\pi}$  改为  $\frac{1}{2\pi\rho}$ .

**【4337】** 证明: 有界闭区域内的非常数调和函数  $u(x, y)$  在此区域内的点不能达到其最大值或最小值 (极大值原理).

证 设有界闭区域为  $\bar{\Omega}$ , 它是由有界开区域  $\Omega$  及其边界  $\partial\Omega$  构成. 我们要证明: 如果  $u(x, y)$  在  $\bar{\Omega}$  内的某点  $P_0(x_0, y_0)$  达到其最大值或最小值 (例如, 设达到最大值), 则  $u(x, y)$  在  $\bar{\Omega}$  上必为常数. 下分三步证明.

(1) 先证: 若圆域  $S_\rho = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2\}$  完全属于  $\Omega$ , 则  $u(x, y)$  在  $S_\rho$  上为常数.



对任何的  $0 < r \leq \rho$ , 用  $C_r$  表圆周  $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ . 由 4336 题的结果可知

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u(\xi, \eta) ds.$$

故

$$\frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds = 0. \quad (1')$$

但因  $u(x_0, y_0)$  为最大值, 故在  $C_r$  上恒有

$$u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq 0.$$

由此, 根据 (1'), 即易知在  $C_r$  上  $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \equiv 0$ . 因为, 若有某点  $(\xi_0, \eta_0) \in C_r$  使  $u(x_0, y_0) - u(\xi_0, \eta_0) = \tau > 0$ , 则由  $u(x, y)$  的连续性可知, 必有以  $(\xi_0, \eta_0)$  为中心的某小圆域  $\sigma$  存在, 使当  $(\xi, \eta) \in \sigma$  时, 恒有  $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq \frac{\tau}{2}$ . 用  $C'_r$  表  $C_r$  含于  $\sigma$  内的部分, 则

$$\oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \int_{C'_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \oint_{C'_r} \frac{\tau}{2} ds = \frac{1}{2} \tau l' > 0,$$

其中  $l'$  表圆弧  $C'_r$  之长, 此显然与 (1') 式矛盾.

于是, 在  $C_r$  上有  $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \equiv 0$ . 再根据  $r$  的任意性 ( $0 < r \leq \rho$ ), 即知对任何  $(\xi, \eta) \in S_\rho$ , 都有  $u(\xi, \eta) = u(x_0, y_0)$ . 换句话说,  $u(x, y)$  在  $S_\rho$  上是常数.

(2) 次证: 设  $P^*(x^*, y^*)$  为  $\bar{\Omega}$  的任一内点 (即  $P^* \in \Omega$ ), 则必有  $u(x^*, y^*) = u(x_0, y_0)$ .

用完全含于  $\Omega$  内的折线  $l$  将点  $P_0(x_0, y_0)$  与点  $P^*(x^*, y^*)$  连接起来 (图 8.68), 用  $\delta$  表  $\partial\Omega$  与  $l$  之间的距离, 即

$$\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

其中  $\min$  的是对一切  $(x, y) \in \partial\Omega, (x', y') \in l$  来取的 (由于  $\partial\Omega, l$  是互不相交的有界闭集, 可证  $\min$  一定能达到, 从而  $\delta > 0$ ). 取  $0 < \delta' < \delta$ , 以点  $P_0$  为中心,  $\delta'$  为半径作一圆, 得圆域  $S_0 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta'^2\}$ , 此

圆域完全含于  $\Omega$  内, 由 (1) 段已证的结论知,  $u(x, y)$  在  $S_0$  中为常数. 特别  $u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$ , 这里点  $P_1(x_1, y_1)$  代表圆周  $C_0 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta'^2\}$  与  $l$  折线的交点. 又以点  $P_1$  为中心,  $\delta'$  半径作一圆, 得圆域  $S_1 = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq \delta'^2\}$ . 由于  $u(x, y)$  在点  $P_1(x_1, y_1)$  也达到最大值, 而  $S_1$  完全含于  $\Omega$  内, 故将 (1) 段结果用于  $S_1$  可知  $u(x, y)$  在  $S_1$  上为常数, 特别  $u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1)$ , 这里点  $P_2(x_2, y_2)$  表圆周  $C_1 = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \delta'^2\}$  与  $l$  的交点 (除  $P_0$  外的另一交点). 再以点  $P_2$  为中心,  $\delta'$  为半径作一圆域  $S_2, \dots$ , 这样继续作下去, 显然, 至多经过  $n$  次 ( $n$  表大于  $\frac{s}{\delta'}$  的最小正整数,  $s$  表  $l$  的长), 点  $P^*(x^*, y^*)$  必属于  $S_{n-1}$ , 从而,

$$u(x^*, y^*) = u(x_{n-1}, y_{n-1}) = \dots = u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0).$$

(3) 由 (2) 段的结果可知,  $u(x, y)$  在  $\Omega$  上是常数; 根据  $u(x, y)$  在  $\bar{\Omega}$  上的连续性, 通过由  $\Omega$  的点趋向  $\partial\Omega$  的点取极限, 即知  $u(x, y)$  在  $\bar{\Omega}$  上是常数. 证毕.

注 从证明过程中看出, 需假定区域  $\Omega$  (从而  $\bar{\Omega}$ ) 是连通的. 事实上, 若  $\Omega$  不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设  $\bar{\Omega} = S_1 + S_2$ , 其中  $S_1$  与  $S_2$  是两个互无公共点的闭圆域, 而令

$$u(x, y) = \begin{cases} c_1, & (x, y) \in S_1, \\ c_2, & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

其中  $c_1 \neq c_2$  是两个常数, 则  $u(x, y)$  显然是  $\bar{\Omega}$  上的调和函数且在  $\bar{\Omega}$  上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

**【4338】** 证明黎曼公式:  $\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$

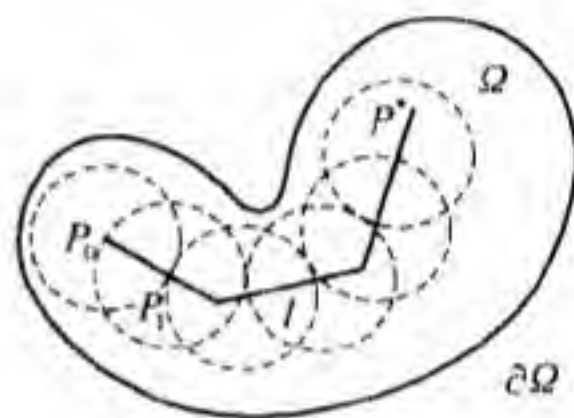


图 8.68

式中  $L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu$ ,  $M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$ ,

( $a, b, c$  为常数),  $P$  和  $Q$  为某些确定的函数, 围线  $C$  是有界区域  $S$  的边界.

证 因为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} &= vL[u] - uM[v] = v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + av \frac{\partial u}{\partial x} + bv \frac{\partial u}{\partial y} + cuv - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + au \frac{\partial v}{\partial x} + bu \frac{\partial v}{\partial y} - cuv \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial x} (vu) + b \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} + auv \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - buv \right), \end{aligned}$$

故利用格林公式, 即得

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

其中

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x} - buv, \quad Q = v \frac{\partial u}{\partial y} + auv.$$

【4339】 设  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  为定常流的速度分量,  $C$  为区域  $S$  的边界, 求区域  $S$  内流体质量的变化率. 若流体是不可压缩的, 且在区域  $S$  内没有源和汇, 则函数  $u$  和  $v$  满足怎样的方程?

解 设流体的速度为  $w$ , 则  $w = ui + vj$ , 又  $ds = dx i + dy j$ . 于是, 流量为

$$Q = \oint_C w \cdot n ds = \oint_C [u \cos(n, x) + v \sin(n, x)] ds = \oint_C u dy - v dx = \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中  $n$  表示曲线  $C$  的外法线上的单位矢量, 并且此处已假定流体的面密度等于 1. 若流体是不可压缩的, 且在区域  $S$  内没有源和汇, 则流体的流出量与流入量的差  $Q$  应等于零, 即

$$\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

又显然, 对于任意的围线  $C$ , 上述结果均正确. 于是, 连续函数  $u, v$  应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

\* ) 参看 4323 题的题解.

【4340】<sup>+</sup> 根据毕奥-萨瓦尔定律, 通过导线元  $ds$  的电流  $i$  在空间的点  $M(x, y, z)$  处所对应的磁场强度为

$$dH = ki \frac{(r \times ds)}{r^3},$$

其中  $r$  为连接导线元  $ds$  与点  $M$  的向量,  $k$  为比例系数. 对于封闭导线  $C$  的情形, 求点  $M$  的磁场强度  $H$  的投影  $H_x, H_y, H_z$ .

解 由题意知: 若设导线  $C$  上的动点为  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 则

$$r = (\xi - x)i + (\eta - y)j + (\zeta - z)k.$$

又  $ds = d\xi i + d\eta j + d\zeta k$ . 于是, 磁场强度为

$$\begin{aligned} H &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix} = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta]i + ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z)d\xi \\ &\quad - (\xi - x)d\zeta]k + ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi]k, \end{aligned}$$

从而投影

$$\begin{aligned} H_x &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta], & H_y &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z)d\xi - (\xi - x)d\zeta], \\ H_z &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi]. \end{aligned}$$



## § 14. 曲面积分

1° 第一型曲面积分 若  $S$  为分片光滑的双侧曲面

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v) \quad ((u,v) \in \Omega) \quad (1)$$

而  $f(x,y,z)$  为在曲面  $S$  的各点上有定义并且连续的函数, 则

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG-F^2} du dv, \quad (2)$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特别情形下, 若曲面的方程具有以下形式:

$$z=z(x,y) \quad ((x,y) \in \sigma),$$

其中  $z(x,y)$  为单值连续可微函数, 则

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_{\sigma} f[x,y,z(x,y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

此积分与曲面  $S$  的正反面的选择无关.

若把函数  $f(x,y,z)$  当作曲面  $S$  在点  $(x,y,z)$  的面密度, 则积分(2)是此曲面的质量.

2° 第二型曲面积分 若  $S$  为光滑的双侧曲面:  $S^+$  为它的正面, 即由法向量  $\mathbf{n} \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$  确定的一面,  $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$  为在曲面  $S$  上有定义而且连续的三个函数, 则

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS. \quad (3)$$

若曲面  $S$  以参数方程(1)的形式给出, 则法向量  $\mathbf{n}$  的方向余弦由下列公式来确定:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且根式前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面  $S$  的另一面  $S^-$  时, 积分(3)的符号相反.

**【4341】** 两个积分  $I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$  和  $I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP,$

(式中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $P$  为其内接八面体的表面  $|x| + |y| + |z| = a$ ) 相差若何?

解 若令

$$x = a \sin\varphi \cos\theta, \quad y = a \sin\varphi \sin\theta, \quad z = a \cos\varphi,$$

则有

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a^2 \sin\varphi d\theta = 4\pi a^4.$$

为求  $I_2$ , 只要注意到  $|z| = a - (|x| + |y|)$ , 并利用对称性, 即得

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP = 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} \sqrt{3} [x^2 + y^2 + (a-x-y)^2] dy \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \left[ x^2 + y^2 + xy + \frac{a^2}{2} - a(x+y) \right] dy \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^a \left[ x^2(a-x) - \frac{1}{6}(a-x)^3 - ax(a-x) + \frac{a^2}{2}(a-x) \right] dx \\ &= 16\sqrt{3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) a^4 = 2\sqrt{3} a^4. \end{aligned}$$



于是,两积分之差为

$$I_1 - I_2 = 2(2\pi - \sqrt{3})a^3.$$

【4342】 计算

$$\iint_S z \, dS,$$

式中  $S$  为曲面  $x^2 + z^2 = 2az$  ( $a > 0$ ) 被曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所割下的部分.

解 作变换

$$x = a \sin \theta, \quad y = y, \quad z = a + a \cos \theta,$$

则两曲面分别化为

$$r = 1, \quad \text{和} \quad y^2 = 2a^2 \cos \theta (1 + \cos \theta).$$

两曲面交线的参数方程为

$$x = a \sin \theta, \quad y = \pm \sqrt{2} a \sqrt{\cos \theta (1 + \cos \theta)}, \quad z = a + a \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}} (a + a \cos \theta) a \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2} a^3 \sqrt{\cos \theta} \sqrt{(1 + \cos \theta)^3} \, d\theta \\ &= -4\sqrt{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos \theta} \sqrt{(1 + \cos \theta)^3}}{\sin \theta} d(\cos \theta) = -4\sqrt{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos \theta} (1 + \cos \theta)}{\sqrt{(1 - \cos \theta)}} d(\cos \theta) \\ &= 4\sqrt{2} a^3 \int_0^1 [t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}}] dt = 4\sqrt{2} a^3 \left[ B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] = \frac{7}{2} \sqrt{2} \pi a^3. \end{aligned}$$

计算下列第一型曲面积分:

【4343】  $\iint_S (x+y+z) \, dS$ , 式中  $S$  为曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ .

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

故有

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y+z) \, dS &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}) \, dy \\ &= \int_{-a}^a (\pi a x + 2a \sqrt{a^2-x^2}) \, dx = 4a \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx = 4a \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^3. \end{aligned}$$

【4344】  $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$ , 式中  $S$  为区域  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$  的边界.

解 面积  $S$  由两部分组成. 一部分为  $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 它在  $Oxy$  平面上的投影为  $x^2 + y^2 = 1$ ; 另一部分为  $S_2: z = 1$ , 它在  $Oxy$  平面上的投影也是  $x^2 + y^2 = 1$ . 对于这两部分分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1.$$

若利用极坐标, 则有

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, dS = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) \, dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) \, dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \, dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}).$$

【4345】  $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$ , 式中  $S$  为四面体  $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  的边界.

提示 注意曲面  $S$  由四部分组成, 分别为

$$S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0; \quad S_2: x=0; \quad S_3: y=0; \quad S_4: z=0.$$

解 曲面  $S$  由四部分组成, 分别为  $S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0; S_2: x=0; S_3: y=0; S_4: z=0$ . 于是, 我们有

$$\begin{aligned}
& \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
&= (\sqrt{3}+1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} + 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2} \\
&= (\sqrt{3}+1) \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) + 2(1 - \ln 2) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1) \ln 2.
\end{aligned}$$

【4346】  $\iint_S |xyz| dS$ , 式中  $S$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $z = 1$  所截下的部分.

解 由于  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$ ,

若利用极坐标, 并注意到对称性, 即得

$$\begin{aligned}
\iint_S |xyz| dS &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{1+4r^2} r dr = 2 \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2} dr = \int_0^1 t^2 \sqrt{1+4t} dt^{**}) \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{32} (y^2 - 1)^2 y^2 dy^{**}) = \frac{1}{32} \left( \frac{y^7}{7} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.
\end{aligned}$$

\* ) 作代换  $r^2 = t$ ,

\*\* ) 作代换  $\sqrt{1+4t} = y$ .

【4347】  $\iint_S \frac{dS}{\rho}$ , 式中  $S$  为椭球面,  $\rho$  为椭球中心到与椭球面微元  $dS$  相切的平面的距离.

解 设椭球面方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,

则曲面上任一点  $(x, y, z)$  的法矢向为  $\left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$ . 从而, 由题设知:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos(n, r)$ , 其中  $n, r$  分

别表示点  $(x, y, z)$  处的法向量和径向量, 即  $\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$ ,

而法线与  $Oz$  轴夹角的余弦为  $\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$ .

$$\begin{aligned}
\text{于是, } \iint_S \frac{dS}{\rho} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}{|z|} dx dy = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c \left[ \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) + \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}} dx dy \\
&= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{c}{\sqrt{1-r^2}} \left( \frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \right) ab r d\theta^{**}) \\
&= 2\pi abc \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \sqrt{1-r^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 2 \frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2} \right] r dr^{**}) \\
&= -\pi abc \left[ 2 \sqrt{1-r^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{4}{3c^2} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1 \\
&= \frac{4\pi}{3} abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).
\end{aligned}$$

\* ) 作广义极坐标变换  $x = a \cos \theta, y = b r \sin \theta$ .

\*\* ) 利用关系式:  $\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \sqrt{1-r^2}$ .

【4348】  $\iint_S z dS$ , 式中  $S$  为螺旋面的一部分:  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$  ( $0 < u < a; 0 < v < 2\pi$ ).

解 由于

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v = 0,$$

故得  $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+u^2}$ . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \int_0^a du \int_0^{2\pi} v \sqrt{1+u^2} dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2} du = 2\pi^2 \left[ \frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi^2 [a \sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})] \end{aligned}$$

【4349】  $\iint_S z^2 dS$ , 式中  $S$  为圆锥面的一部分:  $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$  ( $0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq$

$2\pi$ ) 和  $\alpha$  为常数 ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ).

解 由于

$$E = \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$G = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha,$$

$$F = (\cos \varphi \sin \alpha)(-r \sin \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha (r \cos \varphi \sin \alpha) = 0,$$

故得  $\sqrt{EG-F^2} = r \sin \alpha$ . 于是,  $\iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cos^2 \alpha \cdot r \sin \alpha dr = \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha$ .

【4350】  $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ , 式中  $S$  为圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被曲面  $x^2 + y^2 = 2ax$  所割下的部分.

解 由于  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$ .

又曲面  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影域为  $x^2 + y^2 \leq 2ax$ . 于是, 利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned} \iint_S (xy + yz + zx) dS &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} [r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)] r dr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 \cos \varphi d\varphi = 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4. \end{aligned}$$

【4351】 证明泊松公式:

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

式中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

证 取新坐标系  $Ouvw$ , 其中原点不变, 平面  $ax + by + cz = 0$  即为  $Ovw$  面,  $u$  轴垂直于该面, 则有

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

在新坐标系下, 公式左端的积分可写为  $\iint_S f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dS$ .

显然, 球面  $S$  的方程为  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$  或  $v^2 + w^2 = (1 - u^2)^2$ .

若表示成参数式, 则为

$$u = u, \quad v = \sqrt{1 - u^2} \cos w, \quad w = \sqrt{1 - u^2} \sin w,$$

其中  $-1 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 2\pi$ . 从而,  $dS = \sqrt{EG - F^2} du dw = \sqrt{\frac{1}{1 - u^2} (1 - u^2)^2 - 0} du dw = du dw$ .



于是,最后得

$$\begin{aligned}\iint_S f(ax+by+cz) dS &= \iint_S f(u \sqrt{a^2+b^2+c^2}) dS = \int_0^{2\pi} dw \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2+b^2+c^2}) du \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2+b^2+c^2}) du.\end{aligned}$$

【4352】 求抛物面壳  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的质量, 此壳的面密度按规律  $\rho = z$  而变.

解 质量为

$$\begin{aligned}M &= \iint_S \rho dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} z \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2+y^2) \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+r^2} d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{5} (1+r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right] = \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.\end{aligned}$$

【4353】 求密度为  $\rho_0$  的均质球面壳  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ) 对于  $Oz$  轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho_0 dS = \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi a^4 \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^4 \rho_0.\end{aligned}$$

【4354】 求密度为  $\rho_0$  的均质锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量.

解 设  $(x, y, z)$  为均质锥面壳上任一点, 它到直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$|d| = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \sqrt{\left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned}I &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left[ \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + y^2 \right] \rho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dx dy = \frac{\sqrt{a^2+b^2} \rho_0}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[ \left(\frac{b}{a} r - b\right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \right] r dr \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2} \rho_0}{a} \left[ 2\pi a^3 b^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi a^4}{4} \right] = \frac{\pi a \rho_0 (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2+b^2}}{12}.\end{aligned}$$

【4355】 求均质曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被曲面  $x^2 + y^2 = ax$  所割下部分的质心坐标.

解 质量为  $M = \iint_S \rho_0 dS = \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} dx dy = \sqrt{2} \rho_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{\sqrt{2} \pi a^2 \rho_0}{4}.$

从而, 质心坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} x dx dy = \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a x dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} dy = \frac{8}{\pi a^2} \int_0^a x \sqrt{ax-x^2} dx$$

$$= \frac{8}{\pi a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left( \frac{a}{2} + t \right) \sqrt{\left( \frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt = \frac{8}{\pi a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\left( \frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt = \frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \int_0^a dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} y dy = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} z dx dy = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{16a}{9\pi},$$

即质心为  $(\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi})$ .

\* ) 作变换  $t = x - \frac{a}{2}$ .

【4356】 求均质曲面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a$ ) 的质心坐标.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$

所以,  $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$

由对称性知, 质心的横坐标与纵坐标相等, 即

$$x_0 = y_0 = \frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy}{\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy}.$$

由于,  $\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_0^a \left( -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a-y} dy$

$$= a \left[ \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \int_0^a \sqrt{2ay - 2y^2} dy \right] = a \left[ \frac{\pi a^2}{4} - \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \left( \frac{a}{2} \right)^2}{2} \right] = \frac{\pi a^3}{4} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = -4a^2 \int_1^0 \frac{u}{(1+u^2)} \arcsin u du$$

$$= 2a^2 \left( \frac{\arcsin u}{1+u^2} \Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{du}{(1+u^2) \sqrt{1-u^2}} \right) = 2a^2 \left[ -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}} \Big|_0^1 \right] = \pi a^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right),$$

故有

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{\pi a^3}{4} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\pi a^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于

$$\iint_S z dS = \int_0^a \int_0^{a-x} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_0^a (a-x) dx = \frac{a^3}{2},$$

故有

$$z_0 = \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1),$$

即质心为  $(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{\pi}(\sqrt{2} + 1))$ .

\* ) 由定积分的几何意义知:

$$\int_0^a \sqrt{y(a-y)} dy = \int_0^a \sqrt{\left( \frac{a}{2} \right)^2 - \left( y - \frac{a}{2} \right)^2} dy = \frac{\pi a^2}{8}.$$

\*\* ) 利用 1957 题的结果.

【4357】 密度为  $\rho_0$  的均质截圆锥面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a).$$

以怎样的力吸引质量为  $m$  位于该圆锥面顶点的质点?

解 显然截圆锥面顶点为原点  $O(0,0,0)$ . 对应于半径  $r$  处取斜高为  $ds$  的锥面带, 其面积为

$$dS = 2\pi r ds = 2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点  $O$  处质量为  $m$  的质点的引力在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的射投影显见为零, 而在  $Oz$  轴上的投影为

$$dZ = \frac{km \cdot 2\sqrt{2}\pi r dr \rho_0}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r}.$$

于是, 截圆锥面吸引质量为  $m$  的质点(在顶点处)的引力在坐标轴上的投影为

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z = \int_b^a \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r} = k\pi m \rho_0 \ln \frac{a}{b}.$$

【4358】 求密度为  $\rho_0$  的均质球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的势, 即计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

解 记  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ . 由对称性, 在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的势等于在点  $N_0(0,0,r_0)$  的势. 由余弦定理知, 球面上任一点  $(x,y,z)$  到点  $N_0$  的距离为

$$r = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi} \quad (0 \leq \psi \leq \pi),$$

而球面带  $dS = 2\pi a^2 \sin \psi d\psi$ . 于是, 所求的势为

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r} = 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi}}.$$

令  $u^2 = a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi$ , 则  $2u du = 2r_0 a \sin \psi d\psi$ , 即

$$\sin \psi d\psi = \frac{u}{r_0 a} du.$$

从而, 所求的势为

$$u = \frac{2\pi a \rho_0}{r_0} \int_{|a-r_0|}^{a+r_0} du = \begin{cases} 4\pi a \rho_0, & r_0 < a, \\ \frac{4\pi a^2 \rho_0}{r_0}, & r_0 > a, \\ 4\pi a \rho_0, & r_0 = a \end{cases}$$

也即

$$u = 4\pi \rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明: 若  $M_0$  点在球面内, 则势是个常量; 若  $M_0$  在球面外, 则在该点球面的势等于将球面质量集中于球心的势; 当  $M_0$  点从球面内通过球面时具有连续性, 从而, 当  $M_0$  点在球面上时, 势也是个常量, 且等于球内任一点的势.

【4359】 计算

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x,y,z) dS,$$

式中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2 \leq 1, \\ 0, & x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$$

作出函数  $u = F(t)$  的图像.

解 显然, 平面  $x+y+z = \pm\sqrt{3}$  是球面  $x^2+y^2+z^2 = 1$  的两个切平面, 于是,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & |t| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

由方程组  $\begin{cases} x+y+z=t, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$  得椭圆方程

$$x^2 + y^2 + [t - (x+y)]^2 = 1,$$



或 
$$x^2 + y^2 + xy - t(x+y) = \frac{1-t^2}{2}, \quad (1)$$

记该椭圆围成的区域为  $\Omega$ , 则

$$F(t) = \iint_{\Omega} \{1 - x^2 - y^2 - [t - (x+y)]^2\} \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \iint_{\Omega} [1 - t^2 - 2(x^2 + y^2) - 2xy + 2t(x+y)] dx dy.$$

作平移变换 
$$x = x' + \frac{t}{3}, \quad y = y' + \frac{t}{3},$$

则方程(1)变为 
$$x'^2 + y'^2 + x'y' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \quad (2)$$

记相应的区域为  $\Omega'$ , 而函数为 
$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y'.$$

于是, 
$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega'} \left[1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y'\right] dx' dy'$$

再作旋转变换 
$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x'' + y''}{2},$$

则方程(2)变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2} = 1. \quad (3)$$

记相应的区域为  $\Omega''$ , 而函数为  $f = 1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2)$ . 于是,

$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega''} \left[1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2)\right] dx'' dy''.$$

最后, 作广义极坐标变换, 即  $x'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}} r \cos \varphi, \quad y'' = \sqrt{1-\frac{t^2}{3}} r \sin \varphi,$

则有 
$$F(t) = \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) (r - r^3) dr d\varphi = \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2,$$

其中  $|t| \leq \sqrt{3}$ , 而当  $|t| > \sqrt{3}$ , 则有  $F(t) = 0$ .

考虑函数  $u = F(t)$  ( $-\infty < t < +\infty$ ). 我们有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) t \quad (|t| < \sqrt{3}).$$

当  $t = \sqrt{3}$  时,  $u$  的左导数  $= -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) \Big|_{t=\sqrt{3}} = 0$ ,  $u$  的右导数显然为零 (因为  $t \geq \sqrt{3}$  时,  $u \equiv 0$ ), 故  $t = \sqrt{3}$  时  $u$

的导数存在且等于零. 同理可证,  $t = -\sqrt{3}$  时,  $u$  的导数也存在且等于零. 于是, 曲线  $u = F(t)$  在  $t = 0$  处以及

$|t| \geq \sqrt{3}$  的各  $t$  处切线都平行于  $Ot$  轴. 又  $t = 0$  处达极大值  $u = \frac{\pi}{2}$ , 且为最大值. 由于

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{2\pi}{3} (1 - t^2),$$

所以, 当  $t = \pm 1$  时为拐点. 显然, 图像关于  $Ou$  轴是对称的. 函数  $u = F(t)$  的图像如图 8.69 所示.

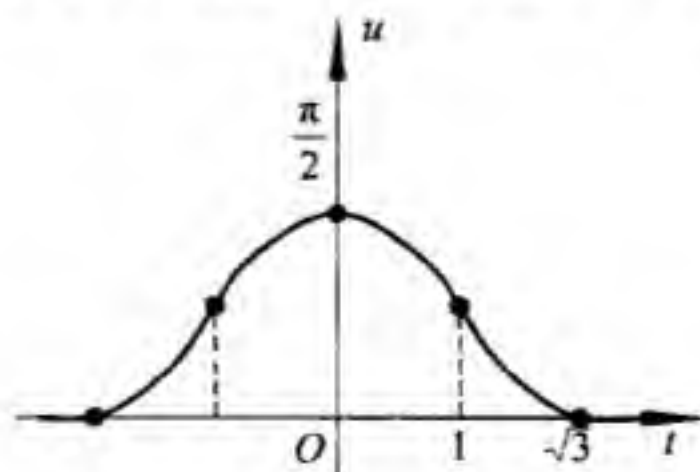


图 8.69

【4360】 计算积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

解 由球面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases} z^2 = t^2 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

可得

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{2} = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是, 积分

$$\begin{aligned} F(t) &= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} (x^2 + y^2) \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= |t| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi. \end{aligned}$$

因为

$$\int \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - r^2 - t^2}{\sqrt{t^2 - r^2}} d(t^2 - r^2) = \frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} + C,$$

$$\text{所以, } \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \left[ \frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} \right] \Big|_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} = \frac{-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 + \frac{2}{3} |t|^3 = \frac{8-5\sqrt{2}}{12} |t|^3.$$

$$\text{于是, 最后得 } F(t) = |t| \int_0^{2\pi} \frac{8-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 d\varphi = \frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6} t^4.$$

【4361】 计算积分  $F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$

其中  $S$  是变球面  $(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 = t^2$ ,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2, \end{cases}$$

且假设  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0$ .

解 记  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . 旋转坐标轴, 使点  $P(x, y, z)$  位于  $Oz$  轴的正向上的点  $P_0(0, 0, r)$ , 如图 8.70 所示.

显然, 当  $0 < t \leq r-a$  及  $t \geq r+a$  时, 整个球面上的点满足  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2$ , 此时  $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ . 从而, 积分

$$f(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS = 0.$$

当  $r-a < t < r+a$  时, 则  $F(x, y, z, t) = \iint_{S'} dS'$ , 其中  $S'$  为  $S$  位于  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$  内的部分. 从而, 我们有

$$F(x, y, z, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} t^2 \sin\theta d\theta = 2\pi t^2 (1 - \cos\alpha) = 2\pi t^2 \left(1 - \frac{t^2 + r^2 - a^2}{2rt}\right) = \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r-t)^2].$$

计算下列第二型曲面积分:

【4362】  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , 式中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外侧.

提示 根据轮换对称知, 只要计算  $\iint_S z dx dy$ . 注意到上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  应取上侧, 下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  应取下侧.

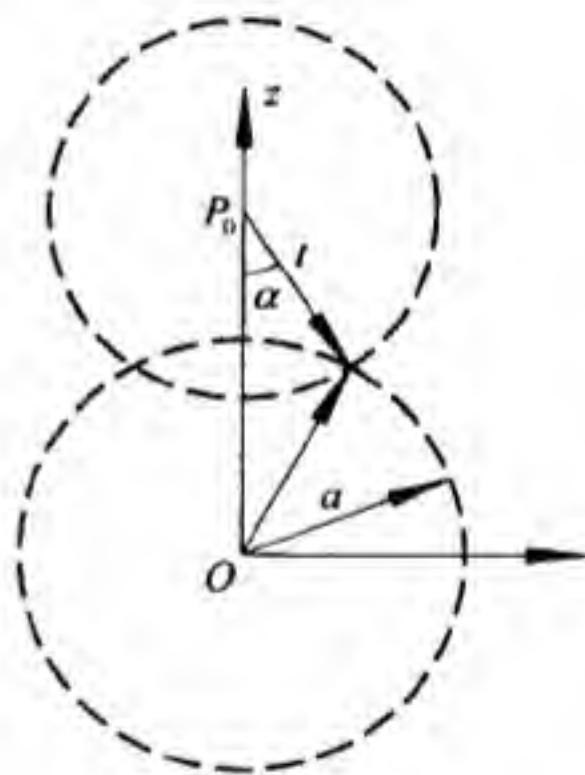


图 8.70

解 根据轮换对称知, 只要计算  $\iint_S z dx dy$ , 注意到上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  应取上侧, 下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  应取下侧, 则有

$$\begin{aligned}\iint_S z dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi a^3.\end{aligned}$$

于是, 积分  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3$ .

**【4363】**  $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$ , 式中  $f(x), g(y), h(z)$  为连续函数,  $S$  为平行六面体  $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c$  的外表面.

解 只要计算任何一个积分, 其他两个可类似地写出结果. 例如, 下面计算  $\iint_S h(z) dx dy$ . 由于六面体有四个面垂直于  $Oxy$  平面, 故曲面积分应为零. 从而,

$$\iint_S h(z) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(c) dx dy - \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(0) dx dy = abc \frac{h(c) - h(0)}{c}.$$

类似地, 可得到  $\iint_S f(x) dx dz$  及  $\iint_S g(y) dx dz$  的值. 于是, 所求的积分为

$$\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy = abc \left[ \frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right].$$

**【4364】**  $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$ , 式中  $S$  为圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的外侧.

解 解法 1:

记  $S_1, S_2$  分别为锥面的底面和侧面, 而  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为锥面外法线的方向余弦. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) dr \\ &= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = 0.\end{aligned}$$

另一方面, 在侧面  $S_2$  上, 对于任一点  $(x, y, z)$ , 有

$$\frac{\cos \alpha}{x} = \frac{\cos \beta}{y} = \frac{\cos \gamma}{-z}$$

从而,  $dS$  在各坐标面上的投影分别为

$$\cos \gamma dS = -d\sigma_{xy}, \quad \cos \alpha dS = -\frac{x}{z} \cos \gamma dS = \frac{x}{z} d\sigma_{xy}, \quad \cos \beta dS = -\frac{y}{z} \cos \gamma dS = \frac{y}{z} d\sigma_{xy}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy &= \iint_{S_2} [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} \left[ \frac{x}{z} (y-z) + \frac{y}{z} (z-x) - (x-y) \right] d\sigma_{xy} = -2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = 0.\end{aligned}$$

综上所述, 我们得  $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0$ .

解法 2:

记曲面  $S$  在各坐标面的投影域分别为  $S_{xy}, S_{yz}$  和  $S_{zx}$ . 于是,



$$\begin{aligned}
& \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy = \iint_S (y-z)dydz + \iint_S (z-x)dzdx + \iint_S (x-y)dxdy \\
&= \left[ \iint_{S_{yz}} (y-z)dydz - \iint_{S_{yz}} (y-z)dydz \right] + \left[ \iint_{S_{zx}} (z-x)dzdx - \iint_{S_{zx}} (z-x)dzdx \right] \\
&\quad + \left[ \iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy - \iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy \right] \\
&= 0+0+0=0.
\end{aligned}$$

**【4365】**  $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$ , 式中  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.

提示 根据轮换对称知, 只要计算  $\iint_S \frac{dxdy}{z}$ , 与 4362 题类似, 注意曲面的侧, 并利用广义极坐标  $x = \arccos \varphi, y = b \sin \varphi$ .

解 根据轮换对称知, 只要计算一个积分. 例如, 计算  $\iint_S \frac{dxdy}{z}$ . 利用广义极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{dxdy}{z} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy - \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{-1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy \\
&= \frac{2}{c} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy = \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{4\pi ab}{c} [-\sqrt{1-r^2}] \Big|_0^1 = 4\pi \frac{ab}{c}.
\end{aligned}$$

于是, 我们有  $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} = 4\pi \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = \frac{4\pi}{abc} (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$ .

**【4366】**  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , 式中  $S$  为球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  的外侧.

解 根据轮换对称知, 只要计算  $\iint_S z^2 dxdy$ . 注意到  $z-c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$ , 并利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
& \iint_S z^2 dxdy \\
&= \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy - \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy \\
&= 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dxdy = 4c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\
&= 8\pi c \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^R = \frac{8}{3} \pi R^3 c.
\end{aligned}$$

于是, 我们有  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8}{3} \pi R^3 (a+b+c)$ .

## § 15. 斯托克斯公式

若  $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$  为连续可微函数,  $S$  为分片光滑的有界双侧曲面, 其边界  $C$  为分段光滑的简单封闭围线, 则成立斯托克斯公式:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的法线的方向余弦, 并且从此法线所指方向来看, 积分时围线  $C$  的环绕方向

是逆时针的(对于右手坐标系).

【4367】 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint_C ydx + zdy + xdz,$$

式中  $C$  为圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ , 并且从  $Ox$  轴的正向来看, 积分时此圆周的环绕方向是逆时针的. 用直接计算法检验结果.

解 平面  $x + y + z = 0$  的法线的方向余弦为  $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

于是,

$$\begin{aligned}\oint_C ydx + zdy + xdz &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} dS = - \iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS \\ &= -\pi a^2 (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = -\sqrt{3}\pi a^2.\end{aligned}$$

下面用直接计算法检验结果. 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

消去  $z$ , 即得曲线  $C$  在平面  $Oxy$  上的投影  $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}$ . 作旋转变换  $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ , 则方程化为  $3x'^2 + y'^2 = a^2$ . 因而, 曲线  $C$  的参数方程可取为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right), \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right), \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是, 所求的曲线积分为

$$\begin{aligned}\oint_C ydx + zdy + xdz &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[ - \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \left( \frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \left( \frac{-\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right) \right] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) dt = \frac{a^2}{2} (-\sqrt{3}) 2\pi = -\sqrt{3}\pi a^2.\end{aligned}$$

可见, 两种计算法结果一样.

【4368】 计算积分  $\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$ ,

此积分是从点  $A(a, 0, 0)$  至点  $B(a, 0, h)$  沿着螺旋线  $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = \frac{h}{2\pi}\varphi$  进行的.

提示 将直线段  $AB$  与曲线  $AmB$  组成封闭围线, 并依正方向进行, 应用斯托克斯公式即易获解.

解 连接  $A, B$  两点得线段  $AB$ , 它与  $AmB$  组成封闭围线并依正向进行, 则由斯托克斯公式知:

$$\oint_{AmBA} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \iint_S 0dydz + 0dzdx + 0dxdy = 0.$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz &= \int_{AB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \int_0^h z^2 dz^* = \frac{h^3}{3}.\end{aligned}$$

\* ) 在线段  $AB$  上,  $x = a, y = 0, dx = dy = 0$ , 而  $0 \leq z \leq h$ .

【4369】 设  $C$  为平面  $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$  ( $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  为平面之法线的方向余弦) 上的封闭围线, 所围面积为  $S$ , 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

积分沿围线  $C$  的正方向进行.

解 若记  $P = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix} = z\cos\beta - y\cos\gamma, \quad Q = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix} = x\cos\gamma - z\cos\alpha,$

$R = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix} = y\cos\alpha - x\cos\beta,$

则得

$$\begin{aligned} \oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} &= \oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\ &= 2 \iint_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) dS = 2 \iint_S dS = 2S. \end{aligned}$$

应用斯托克斯公式, 计算积分:

【4370】  $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ , 式中  $C$  为椭圆周  $x = a\sin^2 t, y = 2a\sin t \cos t, z = a\cos^2 t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ), 并且以参数  $t$  增大的方向为积分时的正方向.

解  $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \iint_S 0 dydz + 0 dzdx + 0 dx dy = 0.$

【4371】  $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 式中  $C$  为椭圆周  $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  ( $a > 0, h > 0$ ), 并且若从  $Ox$  轴正向看去, 积分是沿此椭圆依逆时针方向进行的.

解 椭圆如图 8.71 所示. 把平面  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  上  $C$  所包围的区域记为  $S$ , 则  $S$  的法线方向为  $\{h, 0, a\}$ . 注意到  $S$  的法线方向和曲线  $C$  的方向是正向联系的, 即得

$$\begin{aligned} &\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= -2 \iint_S dydz + dzdx + dx dy = -2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \iint_S dS \\ &= -2 \left( \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} + 0 + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \right) \pi a \sqrt{a^2+h^2} = -2\pi a(a+h). \end{aligned}$$

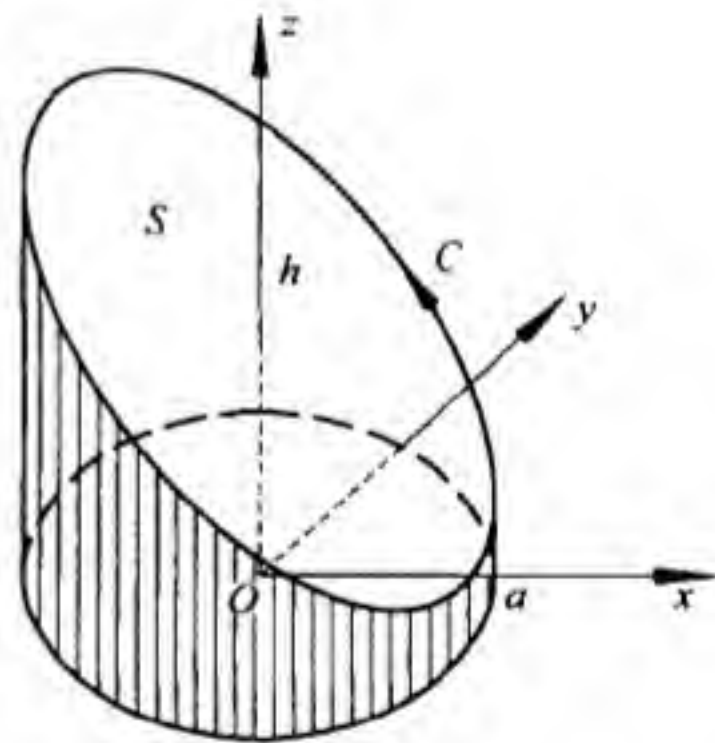


图 8.71

【4372】  $\oint_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$ , 式中  $C$  是曲线  $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx$  ( $0 < r < R, z > 0$ ), 并且在沿此曲线进行积分时, 球面  $x^2+y^2+z^2=2Rx$  外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\beta = \frac{y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz = 2 \iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma] dS$$



$$= 2 \iint_S \left[ (y-z) \left( \frac{x}{R} - 1 \right) + (z-x) \frac{y}{R} + (x-y) \frac{z}{R} \right] dS = 2 \iint_S (z-y) dS.$$

由于曲面  $S$  关于  $Oxy$  平面对称, 故  $\iint_S y dS = 0$ . 又  $\iint_S z dS = \iint_S R \cos y dS = R \cdot \pi r^2$ ,

于是, 
$$\oint_C (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi R r^2.$$

**【4373】**  $\oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ , 式中  $C$  为用平面  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  截立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  所得截面的边界, 并且若从  $Ox$  轴的正向看去, 积分是沿  $C$  依逆时针方向进行的.

**解** 平面  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  含于立方体内的部分记为  $S$ , 它在  $Oxy$  平面上的投影域记为  $S_{xy}$ , 其面积显然等于  $\frac{3}{4}a^2$ . 当平面  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  取上侧时, 法线方向的单位向量为  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ . 于是, 由斯托克斯公式知

$$\begin{aligned} & \oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \\ &= \iint_S \left[ (-2y - 2z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-2z - 2x) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-2x - 2y) \frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS \\ &= -4 \iint_S (x + y + z) \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -6a \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -6a \iint_{S_{xy}} dx dy = -6a \cdot \frac{3}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3. \end{aligned}$$

**【4374】**  $\oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$ , 式中  $C$  为封闭曲线  $x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$ , 并且以参数  $t$  增大的方向为积分时的正方向.

**解** 取  $S$  为由参数方程

$$x = u \cos t, \quad y = u \cos 2t, \quad z = u \cos 3t \quad (0 \leq u \leq a, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

表示的曲面, 则所给曲线  $C$  为曲面  $S$  的边界.

于是, 根据斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} & \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz = 2 \iint_S x^2 (y-z) dy dz + y^2 (z-x) dz dx + z^2 (x-y) dx dy \\ &= \pm 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a [u^2 \cos^2 t (u \cos 2t - u \cos 3t) (y'_u z'_t - y'_t z'_u) + u^2 \cos^2 2t (u \cos 3t - u \cos t) (z'_u x'_t - z'_t x'_u) \\ &\quad + u^2 \cos^2 3t (u \cos t - u \cos 2t) (x'_u y'_t - x'_t y'_u)] du dt \\ &= \pm 2 \int_0^a u^4 du \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) (2 \sin 2t \cos 3t - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\ &\quad \cdot (3 \sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) (\sin t \cos 2t - 2 \sin 2t \cos t)] dt \\ &= \pm \frac{2}{5} a^5 \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) (2 \sin 2t \cos 3t - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\ &\quad \cdot (3 \sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) (\sin t \cos 2t - 2 \sin 2t \cos t)] dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

上式中正负号应这样选取, 使得  $S$  的侧正好配合  $C$  的方向 ( $t$  增大的方向), 积分  $\int_0^{2\pi}$  可以换为  $\int_{-\pi}^{\pi}$  是因为被积函数 ( $t$  的函数) 是周期为  $2\pi$  的函数, 而  $\int_{-\pi}^{\pi}$  等于零是因为被积函数为奇函数.

**注** 本题若不用斯托克斯公式, 而直接计算线积分, 则较为简单.

$$\begin{aligned} & \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz = - \int_0^{2\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2 \cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t + 3 \cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2 \cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t + 3 \cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt = 0, \\ & \int_0^{2\pi} \text{可换为} \int_{-\pi}^{\pi} \text{及} \int_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ 的理由同上.} \end{aligned}$$

【4375】 有函数

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^3} dS \quad (k = \text{常数}).$$

其中曲面  $S$  的边界为围线  $C$ ,  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  的法向量,  $\mathbf{r}$  为连接空间的点  $M(x, y, z)$  与围线  $C$  上的动点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  所成之径向量, 证明: 此函数为通过围线  $C$  的电流  $i$  所产生磁场  $\mathbf{H}$  的势 (参阅 4340 题).

证 利用 4340 题指出的定律, 并注意到

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{k},$$

其中  $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$ , 即得

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= ki \oint_C \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}}{r^3} \\ &= ki \left[ \oint_C \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) d\eta \right] \mathbf{i} + \left[ \oint_C \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\zeta \right] \mathbf{j} + \left[ \oint_C \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi \right] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

利用斯托克斯公式, 并注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{r} \right)$$

及  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ , 从而,

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right),$$

即得

$$\begin{aligned} H_x &= ki \oint_C \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) d\eta = ki \iint_S \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial z} \right) \frac{1}{r} \right] \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{n} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS. \end{aligned}$$

同理,

$$H_y = ki \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS, \quad H_z = ki \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS.$$

于是, 最后得

$$\mathbf{H} = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k},$$

即函数  $W(x, y, z)$  是磁场  $\mathbf{H}$  的势.

## § 16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若空间区域  $V$  的边界  $S$  为分片光滑曲面,  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$ ,  $R = R(x, y, z)$  和它们的一阶偏导数均为区域  $V + S$  内的连续函数, 则成立奥斯特罗格拉茨基公式

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

式中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的外法线的方向余弦.

应用奥斯特罗格拉茨基公式变换下列曲面积分, 设光滑曲面  $S$  是有界区域  $V$  的边界,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的外法线的方向余弦:

【4376】  $\iiint_V x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy.$

解 由于  $P = x^3, Q = y^3, R = z^3$ , 从而,  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$



于是,

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

**【4377】**  $\iint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz.$

解 由于  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , 故得

$$\iint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

**【4378】**  $\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$

解 由于  $P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

从而,  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$  于是,

$$\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

**【4379】**  $\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$

解 由于  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$  故得

$$\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz.$$

**【4380】**  $\iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$

解 记  $P^* = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, Q^* = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, R^* = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$  则易知  $\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial Q^*}{\partial y} + \frac{\partial R^*}{\partial z} = 0.$

于是, 原曲面积分等于零.

**【4381】** 证明: 若  $S$  为封闭的简单曲面, 而  $l$  为任何的固定方向, 则

$$\iint_S \cos(n, l) dS = 0,$$

式中  $n$  为曲面  $S$  的外法向量.

证明思路 注意  $\cos(n, l) = \cos \alpha \cos(l, x) + \cos \beta \cos(l, y) + \cos \gamma \cos(l, z),$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为  $n$  的方向余弦, 并利用奥氏公式, 命题即获证.

证 因为  $\cos(n, l) = \cos \alpha \cos(l, x) + \cos \beta \cos(l, y) + \cos \gamma \cos(l, z),$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为  $n$  的方向余弦, 故有

$$\iint_S \cos(n, l) dS = \iint_S \cos(l, x) dy dz + \cos(l, y) dz dx + \cos(l, z) dx dy.$$

由于  $l$  为固定方向, 从而,  $\cos(l, x), \cos(l, y), \cos(l, z)$  均为常数. 于是,

$$\iint_S \cos(n, l) dS = \iiint_V \left[ \frac{\partial \cos(l, x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(l, y)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(l, z)}{\partial z} \right] dx dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

**【4382】** 证明: 以曲面  $S$  为界的物体的体积等于

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

式中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  的外法线的方向余弦.

证明思路 利用  $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$  及奥氏公式, 命题易获证.

证 由奥氏公式, 有



$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V 3 dx dy dz = 3V, \end{aligned}$$

由此可知  $V = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$ . 证毕.

【4383】 证明:以光滑锥面  $F(x, y, z) = 0$  和平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  为界的锥体的体积等于

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

式中  $S$  为位于该平面上的锥底之面积,  $H$  为锥体的高.

证 证法 1:

不失一般性,设坐标原点位于锥面  $F(x, y, z) = 0$  的顶点. 于是,  $F(x, y, z)$  是  $x, y, z$  的二次齐次函数. 因此,根据齐次函数的欧拉定理知,

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 2F(x, y, z). \quad (1)$$

由 4382 题的结果,有

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iint_{S \cup S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS + \frac{1}{3} \iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $S$  为锥底(位于平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  上),而  $S_1$  是锥的侧面. 在锥面  $S_1$  (即  $F(x, y, z) = 0$ ) 上,有

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

于是,注意到(1)式,即知在  $S_1$  上有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2F(x, y, z)}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = 0,$$

从而,

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (3)$$

又在平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  上,有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = H,$$

其中  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$  是从原点  $(0, 0, 0)$  到点  $(x, y, z)$  的向径,  $\mathbf{n}$  为平面(锥底)的单位外法向量,  $H$  为从原点到平面的距离(即锥体的高). 于是,

$$\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = H \iint_S dS = HS.$$

由此,再注意到(2)式与(3)式,即得  $V = \frac{1}{3} SH$ .

证法 2:

取坐标系  $Ox'y'z'$ , 使锥的顶点在坐标原点,  $Ox'y'$  平面平行于锥的底面, 由于在  $z$  处的锥的截面面积为

$$S(z') = \frac{S z'^2}{H^2},$$

故所求的体积为

$$V = \int_0^H S(z') dz' = \int_0^H \frac{S}{H^2} z'^2 dz' = \frac{1}{3} SH.$$

【4384】 求以曲面  $z = \pm c$  及  $x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v$ ,  $y = a \sin u \sin v - b \cos u \cos v$ ,  $z = c \sin u$  为界的物体的体积.

解 解法 1:

我们有

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u, \quad (1)$$

以  $z = c \sin u$  代入得

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2 = a^2, \quad (2)$$

故所界物体由平面  $z = c, z = -c$  及曲面(2)围成. 利用 1382 题的结果, 即知所求的体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS. \quad (3)$$

其中  $S_1, S_2$  分别是平面  $z = c, z = -c$  上的部分(此时  $u = \frac{\pi}{2}, u = -\frac{\pi}{2}$ , 从而  $x^2 + y^2 = b^2$ , 故  $S_1, S_2$  为圆盘  $x^2 + y^2 \leq b^2$ ),  $S_3$  表曲面(2)的部分,  $x \cos \alpha, y \cos \beta, z \cos \gamma$  表外法线的方向余弦. 显然, 在  $S_1$  上,  $\cos \alpha = \cos \beta = 0, \cos \gamma = \frac{c}{|c|}$ . 于是,

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_{S_1} \frac{c^2}{|c|} dS = |c| \pi b^2.$$

同理可得

$$\iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = |c| \pi b^2.$$

此外, 有

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \iint_{S_3} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(u \cos u \cos v + b \sin u \sin v)(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + (u \cos u \sin v - b \sin u \cos v)(z'_u x'_v - z'_v x'_u) \\ &\quad + c \sin u (x'_u y'_v - x'_v y'_u)] du \\ &= \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2 \cos u du = \pm 4\pi ca^2. \end{aligned} \quad (4)$$

其中的正负号应这样选取, 使对应于  $S_3$  的外侧. 下面确定此正负号. 由(2),  $S_3$  的方程可写为  $F(x, y, z) = a^2$ , 其中  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2$  是二次齐次函数. 于是, 在  $S_3$  上, 有

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}.$$

其中正号对应于  $S_3$  的一侧, 负号对应于  $S_3$  的另一侧. 于是, 根据齐次函数的欧拉定理, 在  $S_3$  (外侧)上有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2F}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2a^2}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad (5)$$

但在  $S_3$  与  $Oxy$  平面的交线(即  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ )的各点上, 对  $S_3$  的外侧, 显然有(注意到曲面(2)关于  $Oxy$  坐标平面对称)

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0,$$

(这是因为此时径向量  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  与单位外法向量  $\mathbf{n}$  的方向一致), 由此可知, 在(5)式中应取正号. 于是,

$$\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_{S_3} \frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} dS > 0.$$

从而, 由(4)式知

$$\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 4\pi |c| a^2.$$

综上所述, 最后得(注意(3)式)

$$V = \frac{1}{3} (4\pi |c| a^2 + |c| \pi b^2 + |c| \pi b^2) = \frac{4\pi}{3} \left( a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|.$$

解法 2:

不用曲面积分求体积的公式(3),而直接计算体积较为简单.由(1)式知,平面  $z=\text{常数}$  (即  $u=\text{常数}$ ) 与曲面(2)的截面  $S(z)$  是圆,故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r dz \iint_{S(z)} dx dy = \int_{-r}^r S(z) dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) |c| d(\sin u) \\ &= |c| \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 u] d(\sin u) = \pi |c| [2a^2 + \frac{2}{3}(b^2 - a^2)] = \frac{4\pi}{3} \left( a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|. \end{aligned}$$

**【4385】** 求以曲面  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = -u + a \cos v$  ( $u \geq 0$ ) 及平面  $x=0, z=0$  ( $a > 0$ ) 为界的物体的体积.

解 解法 1:

用  $S_1$  表物体位于平面  $z=0$  上的那一部分,  $S_2$  为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分,此外,物体表面在平面  $x=0$  上的那部分显然是一线段  $x=0, y=0, 0 \leq z \leq a$ . 于是,利用 4382 题的结果,即知所求体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 \cup S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (1)$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是向外法线的方向余弦. 显然,在  $S_1$  上,  $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = -1, z=0$ , 故

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (2)$$

此外,我们有

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \iint_{S_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (y'_u z'_v - y'_v z'_u) + u \sin v (z'_u x'_v - z'_v x'_u) + (-u + a \cos v) (x'_u y'_v - x'_v y'_u)] du dv \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (u \cos v - a \sin^2 v) + u \sin v (a \sin v \cos v + u \sin v) + (-u + a \cos v) u] du dv \\ &= \pm \iint_D a u \cos v du dv = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} a u \cos v du = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} a^3 \cos^3 v \right) dv \\ &= \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 (1 - \sin^2 v) d(\sin v) = \pm a^3 \left( \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{2}{3} a^3, \end{aligned}$$

其中的正负号应这样选取,使对应于  $S_2$  的外侧,  $D$  为  $u, v$  的变化区域(对应于  $S_2$ ). 由此,再注意到(1)式与(2)式,即得  $V = \pm \frac{2}{9} a^3$ . 但体积恒为正( $V > 0$ ),故必有  $V = \frac{2}{9} a^3$ .

解法 2:

本题若不利用曲面积分计算体积的公式(1),而直接计算体积,则较为简单.(下面  $\Omega$  表物体在  $Oxy$  平面上的投影):

$$\begin{aligned} V &= \iint_D z dx dy = \iint_D (-u + a \cos v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv = \iint_D (-u + a \cos v) u du dv \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} (-u + a \cos v) u du = \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v) d(\sin v) = \frac{2}{9} a^3. \end{aligned}$$

**【4386】** 证明公式:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0).$$

证 证法 1:

作变量代换  $x = tu, y = tv, z = tw$  ( $t > 0$  固定), 则(利用奥氏公式)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 f(tu, tv, tw, t) du dv dw \right\}$$



$$\begin{aligned}
&= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq t} \left[ t^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + 3t^2 f \right] du dv dw \\
&= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq t} t^3 \left\{ \frac{1}{t} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right] \right\} du dv dw + \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq t} t^3 \frac{\partial f}{\partial t} du dv dw \\
&= \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right] dx dy dz + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \\
&= \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0),
\end{aligned}$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  上向外法线的方向余弦. 显然  $\cos \alpha = \frac{x}{t}, \cos \beta = \frac{y}{t}, \cos \gamma = \frac{z}{t}$ , 故

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{t} dS = t \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f dS.$$

于是, 最后得

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0).$$

证法 2:

不利用奥氏公式更简单些. 采用球坐标, 我们有

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi, t) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right] dr \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t \cos \varphi \cos \psi, t \sin \varphi \cos \psi, t \sin \psi, t) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi, t) \\
&\quad \cdot r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz.
\end{aligned}$$

利用奥斯特罗格拉茨基公式计算下列曲面积分:

**【4387】**  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 式中  $S$  为立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  的外表面.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy &= 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz \\
&= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz = 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz = 3a^4.
\end{aligned}$$

**【4388】**  $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , 式中  $S$  为球  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外表面.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4 \cos \psi dr \\
&= 6\pi \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \right) \left( \int_0^a r^4 dr \right) = \frac{12}{5} \pi a^5.
\end{aligned}$$

**【4389】**  $\iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy$ , 式中  $S$  为曲面

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$$

的外侧.

$$\text{解} \quad \iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy = \iiint_V 3 dx dy dz,$$

其中  $V$  为由曲面  $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$  围成的区域. 作变换  $u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$ , 则  $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4$ , 且由  $|u|+|v|+|w|=1$  围成的体积等于  $\frac{4}{3}$ . 于是, 所求的积分为

$$\iint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dx dy = \iiint_{|u|+|v|+|w|\leq 1} 3 \cdot \frac{1}{4} du dv dw = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

\* ) 由  $|u|+|v|+|w|=1$  围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积, 其大小等于由平面  $u+v+w=1, u=0, v=0, w=0$  所围成的四面体体积的 8 倍, 即为  $8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{4}{3}$ .

【4390】 计算

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

式中  $S$  为部分圆锥面  $x^2+y^2=z^2 (0 \leq z \leq h)$ ,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为此曲面外法线的方向余弦.

提示 并合平面  $S_1: z=h, x^2+y^2 \leq h^2$  的部分组成封闭曲面.

解 并合平面  $S_1: z=h, x^2+y^2 \leq h^2$  的部分组成封闭曲面:  $S+S_1$ , 它是空间区域  $V$  的边界, 利用奥氏公式, 即得

$$\begin{aligned} \iint_{S+S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS &= 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h [r(\cos \varphi + \sin \varphi) + z] dz \\ &= 2\pi \int_0^h (rh^2 - r) dr = \frac{\pi h^4}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{又因} \quad \iint_{S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = h^2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy = \pi h^4,$$

$$\text{于是,} \quad \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

【4391】 证明公式:

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS,$$

其中封闭曲面  $S$  为区域  $V$  的表面,  $\mathbf{n}$  为封闭曲面  $S$  上的点  $(\xi, \eta, \zeta)$  处的外法向量, 而

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2},$$

$\mathbf{r}$  为从点  $(x, y, z)$  到点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的径向量.

提示 研究两种情形: (1) 由面  $S$  不包围点  $(x, y, z)$ ; (2) 曲面  $S$  包围点  $(x, y, z)$ .

证 先设曲面  $S$  不包围点  $(x, y, z)$  (即点  $(x, y, z)$  在  $V$  之外), 我们有

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{r}, x) \cos \alpha + \cos(\mathbf{r}, y) \cos \beta + \cos(\mathbf{r}, z) \cos \gamma,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为  $\mathbf{n}$  的方向余弦. 由于

$$\cos(\mathbf{r}, x) = \frac{\xi-x}{r}, \cos(\mathbf{r}, y) = \frac{\eta-y}{r}, \cos(\mathbf{r}, z) = \frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\xi-x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta-y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta-z}{r} \cos \gamma.$$

于是, 利用奥氏公式, 即得

$$\begin{aligned} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS &= \iint_S \left( \frac{\xi-x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta-y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta-z}{r} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi-x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta-y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta-z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta = \iiint_V \frac{2}{r} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

故

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS.$$

次设曲面  $S$  包围点  $(x, y, z)$ . 这时, 不能对  $V$  应用奥氏公式, 必须用一小区域将点  $(x, y, z)$  挖掉, 即以点  $(x, y, z)$  为中心,  $\epsilon$  为半径作一开球域  $V_\epsilon$  ( $\epsilon$  充分小), 其边界(球面)以  $S_\epsilon$  表示. 对闭区域  $V-V_\epsilon$ , 应用奥氏公式, 仿上可得

$$\iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS + \iint_{S_\epsilon} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \iiint_{V-V_\epsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi-x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta-y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta-z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta$$



$$= 2 \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

但在  $S_\epsilon$  上,  $\mathbf{n}$  的方向与  $\mathbf{r}$  的方向相反, 故  $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -1$ . 于是,

$$\iint_{S_\epsilon} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = -4\pi\epsilon^2.$$

由此可知, 在前式中令  $\epsilon \rightarrow +0$  取极限, 即得

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS.$$

证毕.

**【4392】** 计算高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS,$$

式中  $S$  为简单封闭光滑曲面, 它是区域  $V$  的边界,  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  上在点  $(\xi, \eta, \zeta)$  处的外法向量,  $\mathbf{r}$  为连接点  $(x, y, z)$  和点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的径向量,  $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$ .

研究两种情形: (1) 曲面  $S$  不包围点  $(x, y, z)$ ; (2) 曲面  $S$  包围点  $(x, y, z)$ .

**解** 设法线  $\mathbf{n}$  的方向余弦为  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ , 则

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{r}, x)\cos\alpha + \cos(\mathbf{r}, y)\cos\beta + \cos(\mathbf{r}, z)\cos\gamma = \frac{\xi-x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta-y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

因此, 高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \left[ \frac{\xi-x}{r^3} d\eta d\zeta + \frac{\eta-y}{r^3} d\zeta d\xi + \frac{\zeta-z}{r^3} d\xi d\eta \right].$$

这里  $P = \frac{\xi-x}{r^3}, Q = \frac{\eta-y}{r^3}, R = \frac{\zeta-z}{r^3}$ . 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi-x)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta-y)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta-z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点  $(x, y, z)$  处不连续. 因此,

(1) 当曲面  $S$  不包围点  $(x, y, z)$  时, 则  $\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$ . 于是, 利用奥氏公式, 有

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 0.$$

(2) 当曲面  $S$  包围点  $(x, y, z)$  时, 则我们以点  $(x, y, z)$  为中心,  $\epsilon$  为半径作一球  $V_\epsilon$  包围在  $S$  内, 此球面记以  $S_\epsilon$ , 将奥氏公式用于  $V - V_\epsilon$  上, 即得

$$\iint_{S+S_\epsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 0.$$

但因  $\iint_{S_\epsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_{S_\epsilon} \left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right) dS = -4\pi$ , 故得

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 4\pi.$$

**【4393】** 证明: 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

有界区域  $V$  的边界  $S$  为光滑曲面, 则成立下列公式:

$$(1) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz; \quad (2) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz,$$

式中  $u$  及其二阶偏导数是在区域  $V + S$  内连续的函数,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为沿曲面  $S$  的外法线的导数.

**证明思路** 只要注意

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

利用奥氏公式, (1) 及 (2) 的公式均获证.



证 (1) 由于  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ , 因此, 利用奥氏公式即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \iiint_V \Delta u dx dy dz.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_S \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

【4394】 证明三维情形的格林第二公式:

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中区域  $V$  以曲面  $S$  为界,  $\mathbf{n}$  是曲面  $S$  的外法向量, 而函数  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  在区域  $V + S$  内二阶可微.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS &= \iint_S \left[ \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left( v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \left[ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - u \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz. \end{aligned}$$

【4395】 设函数  $u = u(x, y, z)$  在某区域内具有连续的一阶和二阶导数, 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则  $u(x, y, z)$  称为此区域内的调和函数.

证明: 若有界闭区域  $V$  以光滑曲面  $S$  为界,  $u$  是此区域内的调和函数, 则成立下列公式:

$$(1) \quad \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0; \quad (2) \quad \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  的外法向量.

用公式(2)证明: 区域  $V$  内的调和函数由它在边界  $S$  上的值唯一地确定.

证 (1) 由于  $\Delta u = 0$ , 故利用 4393 题(1)的结果, 即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

(2) 利用 4393 题(2)的结果, 即得

$$\begin{aligned} \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iiint_V u \cdot 0 dx dy dz + \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

与 4333 题一样, 只要证明: 若在边界  $S$  上调和函数  $u = 0$ , 则它在区域  $V$  上也恒有  $u = 0$ . 事实上, 利用本题(2), 得

$$\iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0,$$

因此,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

即在区域  $V$  上  $u = \text{常数}$ , 但在  $S$  上  $u = 0$ , 故在区域  $V$  上  $u = 0$ . 这就是证明: 在区域  $V$  内的调和函数由它在边界  $S$  上的值唯一地确定.

**【4396】** 证明: 若函数  $u = u(x, y, z)$  是以光滑曲面  $S$  为界的有界闭区域  $V$  内的调和函数, 则

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS.$$

式中  $\mathbf{r}$  是从区域  $V$  的内点  $(x, y, z)$  引至曲面上的点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的径向量,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

$\mathbf{n}$  为曲面  $S$  上在点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的外法向量.

**证** 在 4394 题中令  $v = \frac{1}{r}$ , 则当  $(\xi, \eta, \zeta) \neq (x, y, z)$  时, 有  $\Delta v = 0$ . 现以点  $P(x, y, z)$  为中心,  $\rho$  为半径作一球面  $S_\rho$  含于曲面  $S$  内, 再将 4394 题应用到由曲面  $S + S_\rho$  所包围的区域  $V$  内, 即得

$$\iint_{S \cup S_\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS = 0,$$

或 
$$\iint_{S_\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS = - \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

显然,  $S$  上的法线是向外的, 而  $S_\rho$  上的法线是指向球心的, 即指向半径减少的一方, 因此,

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} = - \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}.$$

于是, 我们有 
$$\iint_{S_\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho^2} \right) dS = - \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

但  $\iint_{S_\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\rho} \iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ , 又利用中值定理, 得

$$\iint_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2} dS = \frac{1}{\rho^2} u(x', y', z') 4\pi\rho^2 = 4\pi u(x', y', z'),$$

其中  $u(x', y', z')$  为函数  $u$  在球面  $S_\rho$  上某点之值. 从而,

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

上式右端与  $\rho$  无关, 而  $\lim_{\rho \rightarrow 0} u(x', y', z') = u(x, y, z)$ . 因而, 令  $\rho \rightarrow +0$ , 即得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

又由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} &= \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos \gamma \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left( \frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos \gamma \right) = -\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2}, \end{aligned}$$

故最后得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS.$$

**【4397】** 证明: 若半径为  $R$  的球的球心位于点  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $u = u(x, y, z)$  为此球内的调和函数, 则



$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(中值定理).

证 在球  $S$  上应用 4396 题的结果, 即得

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{u \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{u}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS.$$

\* ) 利用 4395 题的结果, 有  $\frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ .

**【4398】** 证明: 若有界闭区域  $V$  内的连续函数  $u = u(x, y, z)$ , 在此区域内部是调和函数, 并且它不是常数, 则此函数在区域内的点不能达到最大值和最小值(极大值原理).

证 证明与 4337 题(平面情形)完全类似. 设有界闭区域为  $\bar{\Omega}$ , 它是由有界开区域  $\Omega$  及其边界  $\partial\Omega$  构成. 我们要证明: 如果  $u(x, y, z)$  在  $\bar{\Omega}$  的某内点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  达到其最大值或最小值(例如, 设达到最大值), 则  $u(x, y, z)$  在  $\bar{\Omega}$  上必为常数. 下分三步证明:

(1) 先证: 若球域  $V_\rho = \{(x, y, z) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq \rho^2\}$  完全属于  $\Omega$ , 则  $u(x, y, z)$  在  $V_\rho$  上为常数.

对任何的  $0 < r \leq \rho$ , 用  $S_r$  表球面  $\{(x, y, z) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2\}$ . 由 4397 题的结果可知

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u(x, y, z) dS,$$

故 
$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS = 0. \quad (1')$$

但因  $u(x_0, y_0, z_0)$  是最大值, 故在  $S_r$  上恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq 0.$$

由此, 根据(1'), 即易知在  $S_r$  上  $u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0$ . 因为, 若有某点  $(x_1, y_1, z_1) \in S_r$  使

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x_1, y_1, z_1) = \tau > 0,$$

则由  $u(x, y, z)$  的连续性可知, 必有以  $(x_1, y_1, z_1)$  为中心的某小球域  $\sigma$  存在, 使当  $(x, y, z) \in \sigma$  时, 恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq \frac{\tau}{2}.$$

用  $S'_r$  表  $S_r$  含于  $\sigma$  内的部分, 则

$$\iint_{S'_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \geq \iint_{S'_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \geq \iint_{S'_r} \frac{\tau}{2} dS = \frac{1}{2} \tau D_r > 0,$$

其中  $D_r$  表  $S'_r$  的面积, 此显然与(1')式矛盾. 于是, 在  $S_r$  上有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0.$$

再根据  $r$  的任意性 ( $0 < r \leq \rho$ ), 即知对任何  $(x, y, z) \in V_\rho$ , 都有  $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$ . 换句话说,  $u(x, y, z)$  在  $V_\rho$  上是常数.

(2) 次证: 设  $P^*(x^*, y^*, z^*)$  为  $\bar{\Omega}$  的任一内点(即  $P^* \in \Omega$ ), 则必有

$$u(x^*, y^*, z^*) = u(x_0, y_0, z_0).$$

用完全含于  $\Omega$  内的折线  $l$  将点  $P(x_0, y_0, z_0)$  与点  $P^*(x^*, y^*, z^*)$  连接起来, 用  $\delta$  表  $\partial\Omega$  与  $l$  之间的距离, 即

$$\delta = \min \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

其中  $\min$  是对一切  $(x, y, z) \in \partial\Omega$ ,  $(x', y', z') \in l$  来取的(由于  $\partial\Omega, l$  是互不相交的有界闭集, 可证  $\min$  一定能达到, 从而  $\delta > 0$ ). 取  $0 < \delta' < \delta$ .

以点  $P_0$  为中心,  $\delta'$  为半径作一球, 得球域

$$V_0 = \{(x, y, z) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq \delta'^2\},$$

此球域完全含于  $\Omega$  内, 由(1)段已证的结果知,  $u(x, y, z)$  在  $V_0$  上为常数, 特别是  $u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0)$ .



这里点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  代表球面

$$S_1 = \{(x, y, z) | (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = \delta'^2\}$$

与折线  $l$  的交点(参看 4337 题的图 8.68).

又以点  $P_1$  为中心,  $\delta'$  为半径作一球, 得球域

$$V_1 = \{(x, y, z) | (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \leq \delta'^2\}.$$

于是,  $V_1$  也完全含于  $\Omega$  内. 由于  $u(x, y, z)$  也在  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  点达到最大值, 故将(1)段的结果用于  $V_1$ , 可知  $u(x, y, z)$  在  $V_1$  上是常数. 特别是  $u(x_2, y_2, z_2) = u(x_1, y_1, z_1)$ . 这里点  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  为球面

$$S_1 = \{(x, y, z) | (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = \delta'^2\}$$

与  $l$  的交点(除  $P_1$  外的另一交点).

再以点  $P_2$  为中心,  $\delta'$  为半径作一球域  $V_2, \dots$ , 这样继续下去. 显然, 至多经过  $n$  次( $n$  为大于  $\frac{s}{\delta'}$  的最小正整数,  $s$  表折线  $l$  的长), 点  $P^*(x^*, y^*, z^*)$  必属于  $V_{n-1}$ . 从而,

$$u(x^*, y^*, z^*) = u(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \dots = u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0).$$

(3) 由(2)段的结果知,  $u(x, y, z)$  在  $\Omega$  上是常数. 根据  $u(x, y, z)$  在  $\bar{\Omega}$  上的连续性, 通过由  $\Omega$  的点趋向  $\partial\Omega$  的点取极限, 即知  $u(x, y, z)$  在  $\bar{\Omega}$  上是常数. 证毕.

注 从证明过程中看出, 需假定区域  $\Omega$  (从而  $\bar{\Omega}$ ) 是连通的. 事实上, 若  $\Omega$  不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设  $\bar{\Omega} = V_1 \cup V_2$ , 其中  $V_1$  与  $V_2$  是两个互无公共点的闭球域, 而令

$$u(x, y, z) = \begin{cases} C_1, & (x, y, z) \in V_1, \\ C_2, & (x, y, z) \in V_2, \end{cases}$$

其中  $C_1 \neq C_2$  是两个常数, 则  $u(x, y, z)$  显然是  $\bar{\Omega}$  上的调和函数且在  $\bar{\Omega}$  上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

**【4399】** 设物体  $V$  全部浸于液体中, 利用帕斯卡定律证明: 液体的浮力等于物体所排开的液体的重量, 而方向是竖直向上(阿基米德定律).

证 将  $Oxy$  坐标面取在液面上, 而  $Oz$  轴垂直液面向下. 设液体密度为  $\rho$ , 浸入液体的物体  $V$  的表面积为  $S$ . 若对应于面积元素  $dS$  液体的深度为  $z$ , 则在  $dS$  上所受的压力为  $\rho z dS$ , 由于此压力总是垂直于  $dS$  面的, 故压力在各坐标轴上的投影为  $-\rho z \cos \alpha dS$ ,  $-\rho z \cos \beta dS$ ,  $-\rho z \cos \gamma dS$ . 利用奥氏公式, 即得作用于物体整个表面的总压力在各坐标轴上的投影

$$P_x = -\rho \iint_S z \cos \alpha dS = -\rho \iiint_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_y = -\rho \iint_S z \cos \beta dS = -\rho \iiint_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_z = -\rho \iint_S z \cos \gamma dS = -\rho \iiint_V dx dy dz = -\rho V.$$

因此, 压力的主向量即合力, 朝着竖直向上的方向, 其大小等于被物体排开的液体的重量. 这就是阿基米德定律.

**【4400】** 设  $S_t$  是动球面  $(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 = t^2$ , 而函数  $f(\xi, \eta, \zeta)$  是连续的, 证明: 函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初始条件  $u \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = f(x, y, z)$ .

证 首先指出, 本题应设  $f(\xi, \eta, \zeta)$  具有连续的二阶偏导数. 先验证函数  $u$  满足初始  $u \Big|_{t=0} = 0$  条件(意

即  $\lim_{t \rightarrow 0} u = 0$ ) 及  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f(x, y, z)$  (意即  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z)$ ). 今固定  $(x, y, z)$ , 由连续性知, 存在常数  $M > 0$ , 使当  $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leq t^2$  时, 恒有

$$|f(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \quad |f'_\xi(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \quad |f'_\eta(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \quad |f'_\zeta(\xi, \eta, \zeta)| \leq M.$$

当  $0 < t < 1$  时, 我们有

$$|u(x, y, z, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \iint_S |f(\xi, \eta, \zeta)| dS \leq \frac{1}{4\pi t} \iint_S M dS = \frac{1}{4\pi t} M 4\pi t^2 = Mt.$$

由此可知,  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, y, z, t) = 0$ .

又作变量代换  $\xi = x + ut, \eta = y + vt, \zeta = z + wt$ , 则有

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS, \quad (1)$$

其中  $S$  是单位球面  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ . 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} u + \frac{\partial f}{\partial \eta} v + \frac{\partial f}{\partial \zeta} w \right) t dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) dS = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2)$$

显然, 当  $0 < t < 1$  时,

$$|I_1| \leq \frac{t}{4\pi} \iint_S 3M dS = 3Mt.$$

故  $\lim_{t \rightarrow 0} I_1 = 0$ . 又显然 (由于连续性)

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x, y, z) dS = \frac{f(x, y, z)}{4\pi} \iint_S dS = f(x, y, z).$$

因此, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z).$$

下面再验证  $u$  满足波动方程. 由 (2) 式, 利用奥氏公式, 有 ( $V$  为球体  $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ ,  $V_t$  为球体  $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \leq t^2$ )

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{t}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cos \gamma \right) dS = \frac{t^2}{4\pi} \iiint_{V_t} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f(x + ut, y + vt, z + wt) du dv dw \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_t} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f(x + u_1, y + v_1, z + w_1) du_1 dv_1 dw_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x + u_1, y + v_1, z + w_1) du_1 dv_1 dw_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left( \iiint_{V_t} f(x + u_1, y + v_1, z + w_1) du_1 dv_1 dw_1 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left( \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right) = \frac{I_3}{4\pi t}. \end{aligned}$$

其中  $\cos \alpha = u, \cos \beta = v, \cos \gamma = w$  为  $S$  的外法线的方向余弦. 又由 (2) 式及 (1) 式, 有

$$I_2 = \frac{1}{4\pi t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS = \frac{u}{t}.$$

从而,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t}$  ( $t > 0$ ). 于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left( \frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t} \right) = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} \quad (t > 0). \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{但} \quad \frac{\partial I_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left[ \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right] \\ &= \Delta \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right] \end{aligned}$$



$$= \Delta \left[ \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(x + t \cos \psi \cos \varphi, y + t \cos \psi \sin \varphi, z + t \sin \psi) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right] = \Delta \left[ \iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right]$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \Delta \left( \iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right) = \Delta \left( \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t \right) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (t > 0).$$

证毕.

## § 17. 场论初步

1° 梯度 若  $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$  (其中  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ) 是连续可微标量场, 则称向量

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

为它的梯度, 简记为  $\text{gradu} = \nabla u$ , 其中  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ . 场  $u$  在已知点  $(x, y, z)$  的梯度的方向与过此点的等值面  $u(x, y, z) = C$  的法线方向一致. 对于场的每一点, 此向量给出函数  $u$  变化率最大的方向和大小,

$$|\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

场  $u$  在某方向  $l(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  上的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{gradu} \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2° 场的散度与旋度 若

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

是连续可微向量场, 则称标量

$$\text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\text{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

称为场的旋度.

3° 向量通过曲面的通量 若  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  给出区域  $\Omega$  内的向量场,  $S$  是此区域内的曲面,  $\mathbf{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  是曲面  $S$  的单位法向量, 则称积分

$$\iint_S a_n dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

(式中  $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$  为向量的法向分量) 为向量  $\mathbf{a}$  在单位法向量  $\mathbf{n}$  所指的方向上通过所给曲面  $S$  的通量. 以向量形式表述的奥斯特罗格拉茨基公式为

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{a} dx dy dz,$$

式中曲面  $S$  为区域  $V$  的边界,  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  的单位外法向量.

4° 向量的环量 数

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

称为向量  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  沿某曲线  $C$  的曲线积分(场的功).

若  $C$  是封闭围线, 则称曲线积分为向量  $\mathbf{a}$  沿围线  $C$  的环量.

以向量形式表述的斯托克斯公式为  $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot} \mathbf{a})_n dS,$



式中封闭围线  $C$  为曲面  $S$  的边界, 并且曲面  $S$  的单位法向量  $\mathbf{n}$  之方向应当这样来选择, 使得立于曲面  $S$  上的观察者从法线所指方向来看, 围线  $C$  的环绕是逆时针的 (对于右手坐标系).

5° 有势场 若向量场  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  是某标量  $u$  的梯度, 即  $\text{grad} u = \mathbf{a}$ , 则  $\mathbf{a}$  称为有势场, 而标量  $u$  称为场的势.

若势  $u$  为单值函数, 则 
$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = u(B) - u(A).$$

特别地, 这时向量  $\mathbf{a}$  的环量等于零.

在单连通区域内给定的场  $\mathbf{a}$  为有势场的充要条件是

$$\text{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

即这样的场应当是无旋场.

**【4401】** 求场  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$  在下列各点的梯度的大小和方向:

(1)  $O(0, 0, 0)$ ; (2)  $A(1, 1, 1)$ ; (3)  $B(2, 0, 1)$ .

在场中怎样的点, 梯度等于零?

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x - 2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6$ .

(1) 在  $O$  点, 有  $\text{grad} u = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ,  $|\text{grad} u| = 7$ , 方向:

$$\cos \alpha = \frac{3}{7}, \cos \beta = -\frac{2}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7};$$

(2) 在  $A$  点, 有  $\text{grad} u = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $|\text{grad} u| = 3\sqrt{5}$ , 方向:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \gamma = 0;$$

(3) 在  $B$  点, 有  $\text{grad} u = 7\mathbf{i}$ ,  $|\text{grad} u| = 7$ , 方向:

$$\cos \alpha = 1, \cos \beta = \cos \gamma = 0.$$

一般地说, 我们有

$$|\text{grad} u| = \sqrt{(2x + y + 3)^2 + (4y + x - 2)^2 + (6z - 6)^2}.$$

要  $|\text{grad} u| = 0$ , 只要

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ 4y + x - 2 = 0, \\ 6z - 6 = 0. \end{cases}$$

解之, 得  $x = -2, y = 1, z = 1$ , 即在点  $(-2, 1, 1)$  梯度为零.

**【4402】** 在空间  $Oxyz$  的哪些点, 场  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  的梯度

(1) 垂直于  $Oz$  轴; (2) 平行于  $Oz$  轴; (3) 等于零?

解  $\text{grad} u = (3x^2 - 3yz)\mathbf{i} + (3y^2 - 3xz)\mathbf{j} + (3z^2 - 3xy)\mathbf{k}$ .

(1) 要  $\text{grad} u \perp Oz$ , 只要  $\text{grad} u \cdot \mathbf{k} = 0$ , 即  $3z^2 - 3xy = 0$  或  $z^2 = xy$ . 因此, 在满足  $z^2 = xy$  的点  $(x, y, z)$ , 其梯度垂直于  $Oz$  轴.

(2) 要  $\text{grad} u \parallel Oz$ , 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0. \end{cases}$$

解之, 得  $x = y = 0$  及  $x = y = z$ . 因此, 在点  $(0, 0, z)$  及  $(x, y, z)$  (其中  $x = y = z$ ), 其梯度平行于  $Oz$  轴.

(3) 要  $|\text{grad} u| = 0$ , 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0, \\ 3z^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

解之, 得  $x = y = z$ . 因此, 在满足  $x = y = z$  的点  $(x, y, z)$ , 其梯度等于零.

**【4403】** 给定标量场

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ , 在空间  $Oxyz$  的哪些点成立等式

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2},$

于是,

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]} = \frac{1}{r}.$$

要  $|\operatorname{grad} u| = 1$ , 只要  $r = 1$ , 即在以点  $(a, b, c)$  为中心, 1 为半径的球面上, 均有

$$\left| \operatorname{grad} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right| = 1.$$

其中  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ .

**【4404】** 作标量场  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$

的等值面, 求通过点  $M(9, 12, 28)$  的等值面, 在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$  内  $\max u$  等于什么?

解 等值面可由  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$

化简得到, 显然有  $u \geq \sqrt{(z+8)^2} + \sqrt{(z-8)^2} \geq z+8 - (z-8) = 16,$

于是, 当  $u \geq 16$  时, 有  $u - \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2},$

平方化简可得  $u^2 - 32z = 2u \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2},$

再平方化简, 即得等值面方程  $\frac{1(x^2 + y^2)}{u^2 - 256} + \frac{1z^2}{u^2} = 1 \quad (u \geq 16),$

这是绕  $Oz$  轴旋转的一个旋转面, 图形省略.

当  $x=9, y=12, z=28$  时,  $u=64$ , 因此, 等值面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1.$$

在区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$  内, 由于

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 16z + 64} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64} \leq \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z} \quad (0 \leq z \leq 6),$$

故函数  $f(z) = \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z}$  在  $[0, 6]$  上的最大值即  $u$  的最大值.

$$\text{但是, } f'(z) = 8 \left( \frac{1}{\sqrt{100 + 16z}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 16z}} \right) < 0 \quad (0 < z \leq 6),$$

故  $f(z)$  在  $[0, 6]$  上递减, 从而,  $\max_{0 \leq z \leq 6} f(z) = f(0) = 20.$

因此, 有  $\max u = 20.$

**【4405】** 求场  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  在点  $A(1, 2, 2)$  及  $B(-3, 1, 0)$  的梯度之间的夹角  $\varphi$ .

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$

在点  $A, B$  的梯度分别为

$$\operatorname{grad} u(A) = \frac{7}{81} i - \frac{4}{81} j - \frac{4}{81} k, \quad \operatorname{grad} u(B) = -\frac{2}{25} i + \frac{3}{50} j.$$

于是,

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{grad} u(A) \cdot \operatorname{grad} u(B)}{|\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)|} = \frac{-\frac{1}{105}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}} = -\frac{8}{9}.$$

**【4406】** 设已知标量场  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , 作出场的等值面和梯度的等模面.

求区域  $1 < z < 2$  内的  $\inf u, \sup u, \inf |\operatorname{grad} u|, \sup |\operatorname{grad} u|$ .

解 将  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  化简整理, 即得  $x^2+y^2+\frac{u^2-1}{u^2}z^2=0$ ,

其中显然有  $0 < |u| < 1$ . 由此可知, 等值面是一个以原点为顶点,  $Oz$  轴为旋转轴的圆锥, 但要去掉原点  $O(0, 0, 0)$ . 因此, 它是一个圆锥孔, 又

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\end{aligned}$$

故有  $|\text{grad}u| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$ .

令  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = c$ , 显见此等模面是一个以  $Oz$  轴为旋转轴的旋转面. 现在令  $y=0$ , 得

$$x = cx^2 + cz^2 \quad \text{或} \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4c^2} \quad (c \neq 0),$$

它是  $Oxz$  面上的圆. 因此, 梯度的等模面是一个旋转环面.

当  $1 < z < 2$  时, 显然有  $0 < u \leq 1$ ; 且当  $x=y=0$  时,  $u=1$ , 而当  $x^2+y^2$  充分大时  $u$  可任意小, 故

$$\inf_{1 < z < 2} u = 0, \quad \sup_{1 < z < 2} u = 1.$$

此外, 显然

$$\inf_{1 < z < 2} |\text{grad}u| = \inf_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

由于对于常数  $a > 0$ , 函数  $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{t+a}$  ( $0 \leq t < +\infty$ ) 当  $t=a$  时达最大值  $f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$  (这可从讨论  $f(t)$  简单地得知), 故对于固定的  $z$ ,  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$  的最大值是  $\frac{1}{2\sqrt{z^2}} = \frac{1}{2z}$  ( $z > 0$ ), 由此可知

$$\sup_{1 < z < 2} |\text{grad}u| = \sup_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}.$$

**【4407】** 精确到高阶无穷小量, 求在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处之二无限接近的等值面

$$u(x, y, z) = c \quad \text{及} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c$$

之间的距离, 其中  $u(x_0, y_0, z_0) = c$  ( $|\text{grad}u(x_0, y_0, z_0)| \neq 0$ ).

解 过点  $M_0$  作等值面  $u(x, y, z) = c$  的垂线, 交等值面  $u(x, y, z) = c + \Delta c$  于点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , 则显然二等值面  $u(x, y, z) = c$  和  $u(x, y, z) = c + \Delta c$  之间的距离  $d = |\overrightarrow{M_0 M_1}|$ . 由于梯度垂直于等值面, 因此,  $\text{grad}u(x_0, y_0, z_0)$  的方向与  $\overrightarrow{M_0 M_1}$  的方向或者重合, 或者相反. 于是, 注意到  $u(x_0, y_0, z_0) = c$ ,  $u(x_1, y_1, z_1) = c + \Delta c$ , 即知

$$\begin{aligned}\Delta c &= u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} (x_1 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} (y_1 - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} (z_1 - z_0) \\ &= [\text{grad}u(x_0, y_0, z_0)] \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} = \pm |\text{grad}u(x_0, y_0, z_0)| |\overrightarrow{M_0 M_1}| \\ &= \pm |\text{grad}u(x_0, y_0, z_0)| d.\end{aligned}$$

由此可知(精确到高阶无穷小),  $d \approx \frac{|\Delta c|}{|\text{grad}u(x_0, y_0, z_0)|}$ .

**【4408】** 证明公式:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\text{grad}(u+c) = \text{grad}u$ ( $c$ 为常数);      | (2) $\text{grad}cu = c\text{grad}u$ ( $c$ 为常数);       |
| (3) $\text{grad}(u+v) = \text{grad}u + \text{grad}v$ ; | (4) $\text{grad}uv = v\text{grad}u + u\text{grad}v$ ; |
| (5) $\text{grad}(u^2) = 2u\text{grad}u$ ;              | (6) $\text{grad}f(u) = f'(u)\text{grad}u$ .           |

提示 利用梯度的定义易证.

证



(1) 由于  $\frac{\partial(u+c)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(u+c)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial(u+c)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$ , 故得  $\text{grad}(u+c) = \text{grad}u$ .

(2) 由于  $\frac{\partial(cu)}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(cu)}{\partial y} = c \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial(cu)}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial z}$ , 故得  $\text{grad}cu = c\text{grad}u$ .

(3) 由于  $\frac{\partial(u+v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(u+v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial(u+v)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}$ , 故得  $\text{grad}(u+v) = \text{grad}u + \text{grad}v$ .

(4) 由于  $\frac{\partial(uv)}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(uv)}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial(uv)}{\partial z} = u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}$ , 故得  $\text{grad}uv = u\text{grad}v + v\text{grad}u$ .

(5) 在(4)中令  $v=u$ , 即得  $\text{grad}(u^2) = 2u\text{grad}u$ .

(6) 由于  $\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}$ , 故得  $\text{grad}f(u) = f'(u)\text{grad}u$ .

**【4409】** 计算: (1)  $\text{grad}r$ ; (2)  $\text{grad}r^2$ ; (3)  $\text{grad} \frac{1}{r}$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

解 (1)  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ . 于是,  $\text{grad}r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , 其中  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ .

(2)  $\text{grad}(r^2) = 2r\text{grad}r = 2r \frac{\mathbf{r}}{r} = 2\mathbf{r}$ .

(3)  $\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{grad}r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ .

**【4410】** 求  $\text{grad}f(r)$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

提示 利用 4408 题(6)及 4409 题(1)的结果.

解  $\text{grad}f(r) = f'(r)\text{grad}r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

\* ) 利用 4408 题(6)的结果.

\*\* ) 利用 4409 题(1)的结果.

**【4411】** 求  $\text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$ , 其中  $\mathbf{c}$  为常向量,  $\mathbf{r}$  为引自坐标原点的径向量.

解 设  $\mathbf{c} = c_x i + c_y j + c_z k$ , 其中  $c_x, c_y, c_z$  为常数. 由于

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = c_x x + c_y y + c_z z \quad \text{及} \quad \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial x} = c_x, \quad \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial y} = c_y, \quad \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial z} = c_z,$$

故  $\text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}$ .

**【4412】** 求  $\text{grad}\{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2\}$  ( $\mathbf{c}$  为常向量).

解  $|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2 = (c_y z - c_z y)^2 + (c_z x - c_x z)^2 + (c_x y - c_y x)^2$ . 于是,

$$\begin{aligned} \text{grad}\{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2\} &= [2c_z(c_x x - c_x z) - 2c_y(c_y y - c_y x)]i + [-2c_z(c_y z - c_y y) + 2c_x(c_x y - c_x x)]j \\ &\quad + [2c_x(c_z z - c_z y) - 2c_y(c_z x - c_z z)]k \\ &= 2[x(c_z^2 + c_y^2 + c_x^2) - c_x(c_x x + c_y y + c_z z)]i + 2[y(c_z^2 + c_y^2 + c_x^2) - c_y(c_x x + c_y y + c_z z)]j \\ &\quad + 2[z(c_z^2 + c_y^2 + c_x^2) - c_z(c_x x + c_y y + c_z z)]k \\ &= 2\mathbf{r}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - 2\mathbf{c}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}). \end{aligned}$$

**【4413】** 证明公式:  $\text{grad}f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad}u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad}v$ .

证 由于  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}$ ,

故有  $\text{grad}f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} i + \frac{\partial v}{\partial y} j + \frac{\partial v}{\partial z} k \right) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad}u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad}v$ .

**【4414】** 证明公式:  $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \cdot \nabla v$ ,

其中  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

证 由于  $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ , 故

$$\begin{aligned}\nabla^2(uv) &= \nabla[\nabla(uv)] = \nabla(u\nabla v + v\nabla u) = \nabla(u\nabla v) + \nabla(v\nabla u) \\ &= (u\nabla^2 v + \nabla u \nabla v) + (v\nabla^2 u + \nabla v \nabla u) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v.\end{aligned}$$

【4415】 证明:若函数  $u=u(x,y,z)$  在凸区域  $\Omega$  内可微,且  $|\operatorname{grad} u| \leq M$ , 其中  $M$  为常数,则对于  $\Omega$  中任意两点  $A, B$  有:

$$|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B),$$

式中  $\rho(A, B)$  为  $A$  与  $B$  两点之间的距离.

证 由于  $\Omega$  为凸区域,故线段  $\overline{AB}$  整个属于  $\Omega$ . 设  $B$  的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $A$  的坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$ , 且令  $x_1 - x_0 = \Delta x, y_1 - y_0 = \Delta y, z_1 - z_0 = \Delta z$ , 并考虑一元函数  $f(t) = u(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), 显然  $f(0) = u(B), f(1) = u(A)$ , 且  $f(t)$  在  $[0, 1]$  上可微, 并且

$$\begin{aligned}f'(t) &= u'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta x + u'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta y \\ &\quad + u'_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

于是,由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}u(A) - u(B) &= f(1) - f(0) = f'(\xi) \\ &= u'_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta x + u'_y(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta y + \\ &\quad u'_z(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta z \\ &= [\operatorname{grad} u(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \vec{BA}.\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}|u(A) - u(B)| &= |[\operatorname{grad} u(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \vec{BA}| \\ &\leq |\operatorname{grad} u(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)| \cdot |\vec{BA}| \leq M\rho(A, B).\end{aligned}$$

【4416】 求场  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  在已知点  $M(x, y, z)$  处沿此点的径向量  $r$  之方向的导数.

在怎样的情况下,此导数等于梯度的大小?

解  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ , 其中  $\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2x}{a^2} \frac{x}{r} + \frac{2y}{b^2} \frac{y}{r} + \frac{2z}{c^2} \frac{z}{r} = \frac{2u}{r}.$$

又  $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$ . 要  $|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial r}$ , 只要  $\frac{u}{r} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$ , 即只要  $a = b = c$ , 此即所求的解.

【4417】 求场  $u = \frac{1}{r}$  (其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) 在方向  $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  上的导数.

在怎样的情况下,此导数等于零?

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$ . 于是,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= -\frac{x}{r^3} \cos \alpha - \frac{y}{r^3} \cos \beta - \frac{z}{r^3} \cos \gamma = -\frac{1}{r^2} [\cos(r, x) \cos \alpha + \cos(r, y) \cos \beta + \cos(r, z) \cos \gamma] \\ &= -\frac{\cos(l, r)}{r^2}.\end{aligned}$$

要  $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ , 只要  $\cos(l, r) = 0$ , 即  $l \perp r$ , 此即所求的解.

【4418】 求场  $u = u(x, y, z)$  在场  $v = v(x, y, z)$  的梯度方向的导数.

在怎样的情况下,此导数等于零?

解  $l = \operatorname{grad} v, l_0 = \frac{\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$ . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot l_0 = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$$

要  $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ , 只要  $\text{grad} u \perp \text{grad} v$ , 此即所求的解.

**【4419】** 设  $u = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $c = i + j + k$ , 写出  $a = c \times \text{grad} u$  通过单位向量  $i, j, k$  的表达式.

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \left( -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} a = c \times \text{grad} u &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} [(x^2 + y^2 + yz)i - (x^2 + y^2 + xz)j + (x - y)zk]. \end{aligned}$$

**【4420】** 确定向量场  $a = xi + yj + 2zk$  的向量线.

解 向量线系这样的一条曲线  $C$ , 在  $C$  上每一点的切线与向量场在该点的方向重合, 因此, 有  $dr \parallel a$ , 即

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z},$$

其中  $a = a_x i + a_y j + a_z k$ .

今有  $a_x = x, a_y = y, a_z = 2z$ , 故得  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}.$

解之, 得  $y = c_1 x, z = c_2 x^2$ .

**【4421】** 用直接计算的方法证明: 向量  $a$  的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系  $Oxyz$  (坐标轴方向的单位向量为  $i, j, k$ ) 外, 另有直角坐标系  $O'x'y'z'$  (坐标轴方向的单位向量为  $i', j', k'$ ), 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'},$$

设

$$\begin{cases} i' = \cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k, \\ j' = \cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k, \\ k' = \cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k. \end{cases}$$

又设  $\vec{r}_0 = \vec{OO'} = ai + bj + ck$ . 于是, 空间一点  $P$  在两个坐标系中的坐标  $(x, y, z)$  与  $(x', y', z')$  之间的关系为

(令  $\vec{r} = \vec{OP}, \vec{r}' = \vec{O'P}$ );

$$\begin{aligned} x' = \vec{r}' \cdot \vec{i}' &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{i}' = (x - a) \cos \alpha_1 + (y - b) \cos \beta_1 + (z - c) \cos \gamma_1, \\ y' = \vec{r}' \cdot \vec{j}' &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{j}' = (x - a) \cos \alpha_2 + (y - b) \cos \beta_2 + (z - c) \cos \gamma_2, \\ z' = \vec{r}' \cdot \vec{k}' &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k}' = (x - a) \cos \alpha_3 + (y - b) \cos \beta_3 + (z - c) \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ &= a_x (\cos \alpha_1 \vec{i}' + \cos \beta_1 \vec{j}' + \cos \gamma_1 \vec{k}') + a_y (\cos \alpha_2 \vec{i}' + \cos \beta_2 \vec{j}' + \cos \gamma_2 \vec{k}') + a_z (\cos \alpha_3 \vec{i}' + \cos \beta_3 \vec{j}' + \cos \gamma_3 \vec{k}'). \end{aligned}$$

由此可知

$$a_x = a_{x'} \cos \alpha_1 + a_{y'} \cos \alpha_2 + a_{z'} \cos \alpha_3 \quad a_y = a_{x'} \cos \beta_1 + a_{y'} \cos \beta_2 + a_{z'} \cos \beta_3 \quad a_z = a_{x'} \cos \gamma_1 + a_{y'} \cos \gamma_2 + a_{z'} \cos \gamma_3.$$

于是,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = \left( \cos \alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos \alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos \alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'} \right) \cos \alpha_1$$



$$+ \left( \cos \alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos \alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos \alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \right) \cos \alpha_2 + \left( \cos \alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos \alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos \alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \right) \cos \alpha_3.$$

同理, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{y'}}{\partial y} &= \left( \cos \beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'} \right) \cos \beta_1 + \left( \cos \beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \right) \cos \beta_2 \\ &\quad + \left( \cos \beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \right) \cos \beta_3, \\ \frac{\partial a_{z'}}{\partial z} &= \left( \cos \gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'} \right) \cos \gamma_1 + \left( \cos \gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \right) \cos \gamma_2 \\ &\quad + \left( \cos \gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \right) \cos \gamma_3. \end{aligned}$$

将这三式相加, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z} &= (i' \cdot i') \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + (j' \cdot i') \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + (k' \cdot i') \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'} + (i' \cdot j') \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + (j' \cdot j') \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + (k' \cdot j') \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \\ &\quad + (i' \cdot k') \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + (j' \cdot k') \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + (k' \cdot k') \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \\ &= \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}. \end{aligned}$$

证毕.

【4422】 证明:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a}_n \, dS,$$

其中  $S$  表示围绕着点  $M$  的封闭曲面,  $V$  是该曲面所围区域的体积,  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  的外法向量,  $d(S)$  为曲面  $S$  的直径.

**证明思路** 注意  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma$ , 并应用奥氏公式及积分中值定理, 命题即可获证.

**证** 由于

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是  $\mathbf{n}$  的方向余弦. 应用奥氏公式以及积分中值定理, 得

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{a}_n \, dS &= \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) \, dS = \iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{a}) dx dy dz \\ &= \operatorname{div} \mathbf{a}(M_1) \cdot V, \end{aligned}$$

其中  $M_1$  是  $V$  中某点, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M_1) = \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a}_n \, dS.$$

令  $d(S) \rightarrow 0$ , 这时  $V$  缩向点  $M$ , 从而点  $M_1 \rightarrow M$ , 取极限, 即得

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a}_n \, dS.$$

证毕.

【4423】 求

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

**提示** 利用散度的定义, 易得结果为零.

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} &= \operatorname{div} \left[ \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) k \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

【4424】 证明:

(1)  $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$ ; (2)  $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} u$  ( $\mathbf{c}$  为常量,  $u$  为标量);

(3)  $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$ .

提示 利用散度的定义易证.

证 (1) 设  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ .

由于  $\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial y}$  及  $\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$ , 故得  $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$ .

(2) 设  $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$ , 其中  $c_x, c_y, c_z$  为常数.

由于  $\frac{\partial(uc_x)}{\partial x} = c_x \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(uc_y)}{\partial y} = c_y \frac{\partial u}{\partial y}$  及  $\frac{\partial(uc_z)}{\partial z} = c_z \frac{\partial u}{\partial z}$ , 故得  $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} u$ .

(3) 由于  $\frac{\partial(ua_x)}{\partial x} = u \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(uc_y)}{\partial y} = u \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial u}{\partial y}$  及  $\frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = u \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}$ , 故得  $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$ .

【4425】 求  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ .

提示 利用梯度及散度的结果, 易得结果为  $\Delta u$  (或记成  $\nabla^2 u$ ).

解  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$  (或记成  $\nabla^2 u$ ).

【4426】 求  $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 在怎样的情况下  $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$ ?

提示 利用 4410 题的结果.

解 由 4410 题的结果知,  $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

于是,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ f'(r) \frac{x}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ f'(r) \frac{y}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ f'(r) \frac{z}{r} \right] \\ &= f''(r) \left( \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) + f'(r) \left( \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r). \end{aligned}$$

要  $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$ , 只要  $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$ . 将上述方程写成下述形式:

$$rf''(r) + 2f'(r) = 0. \quad \text{或} \quad [rf''(r) + f'(r)] + f'(r) = 0.$$

积分之, 即得

$$rf'(r) + f(r) = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

再积分之, 得

$$rf(r) = Cr + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数}).$$

于是, 最后得

$$f(r) = C + \frac{C_1}{r}.$$

此即所求的解.

【4427】 计算: (1)  $\operatorname{div} \mathbf{r}$ ; (2)  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

提示 利用散度定义, 易得结果: (1) 3; (2)  $\frac{2}{r}$ .

解 (1)  $\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ .

$$\begin{aligned} (2) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r} \right) = \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) + \left( \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) + \left( \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

【4428】 计算  $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{c}]$ , 式中  $\mathbf{c}$  为常向量.

提示 利用 4424 题(2)及 4410 题的结果.

解  $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{c}] = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} f(r) = \mathbf{c} \cdot f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{f'(r)}{r} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$

\* ) 利用 4424 题(2)的结果.

\* \* ) 利用 4410 题的结果

**【4429】** 求  $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$ . 在怎样的情况下该散度等于零?

提示 利用 4424 题(3)及 4410 题的结果.

解  $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = f(r)\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad}f(r) = 3f(r) + \mathbf{r} \cdot f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = 3f(r) + rf'(r)$ .

要  $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = 0$ , 只要  $3f(r) + rf'(r) = 0$ , 即  $\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}$ . 积分之, 即得

$$f(r) = \frac{C}{r^3} \quad (C \text{ 为常数}),$$

此即所求的解.

\* ) 利用 4424 题(3)的结果.

\* \* ) 利用 4410 题的结果

**【4430】** 求: (1)  $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$ ; (2)  $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$ .

提示 利用 4424 题(3)及 4425 题的结果.

解 (1)  $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u) = u\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) + \operatorname{grad}u \cdot \operatorname{grad}u = u\Delta u + (\operatorname{grad}u)^2$

(2)  $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v) = u\operatorname{div}(\operatorname{grad}v) + \operatorname{grad}v \cdot \operatorname{grad}u = u\Delta v + \operatorname{grad}u \cdot \operatorname{grad}v$ .

\* ) 利用 4424 题(3)的结果.

\* \* ) 利用 4425 题的结果

**【4431】** 设流体充满空间并以恒定的角速度  $\omega$  依逆时针方向绕  $Oz$  轴旋转. 求速度向量  $\mathbf{v}$  和加速度向量  $\mathbf{w}$  在已知时刻在空间点  $M(x, y, z)$  处的散度.

解  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}$ . 微分之, 即得

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}) \\ &= \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v}_0 + (\omega \cdot \mathbf{r})\omega - (\omega \cdot \omega)\mathbf{r}.\end{aligned}$$

为了计算  $\operatorname{div}\mathbf{v}$  和  $\operatorname{div}\mathbf{w}$ , 先计算  $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , 此处  $\mathbf{a}$  为常向量. 由于

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{r})_x = a_y z - a_z y, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_y = a_z x - a_x z, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_z = a_x y - a_y x.$$

故得  $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0$ .

于是, 即得

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}_0 + \operatorname{div}(\omega \times \mathbf{r}) = 0.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = \operatorname{div}\dot{\mathbf{v}}_0 + \operatorname{div}(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) + \operatorname{div}(\omega \times \mathbf{v}_0) + \operatorname{div}[(\omega \cdot \mathbf{r})\omega] - \operatorname{div}[(\omega \cdot \omega)\mathbf{r}].$$

而  $\operatorname{div}[(\omega \cdot \mathbf{r})\omega] = \omega \cdot \mathbf{r}\operatorname{div}\omega + \omega \cdot \operatorname{grad}(\omega \cdot \mathbf{r}) = \omega \cdot \omega = \omega^2$

及  $\operatorname{div}[(\omega \cdot \omega)\mathbf{r}] = \omega \cdot \omega\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad}(\omega \cdot \omega) = 3\omega^2$ .

从而, 最后得  $\operatorname{div}\mathbf{w} = \omega^2 - 3\omega^2 = -2\omega^2$ .

\* ) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

\* \* ) 利用 4424 题(3)的结果

\* \* \* ) 利用 4411 题的结果.

**【4432】** 求包含多个引力中心的有限系统所产生的引力场之散度.

解 引力  $\mathbf{F} = \frac{k\mathbf{r}}{r^3}$  ( $k$  为常数). 于是,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kz}{r^3}\right) = k\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$



$$=k\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right]=k\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0.$$

【4433】 求由极坐标  $r$  与  $\varphi$  表示的平面向量  $a=a(r, \varphi)$  之散度的表示式.

解 设极坐标的  $r$  线与  $\varphi$  线的单位向量为  $e_r$  与  $e_\varphi$ , 且

$$a(r, \varphi)=a_r(r, \varphi)e_r+a_\varphi(r, \varphi)e_\varphi.$$

这里自然假定  $a_r, a_\varphi$  都具有连续的偏导数. 取面积元素  $\Delta S=r\Delta\varphi\Delta r$ , 记其围线为  $\Delta C$ . 首先, 推导向量  $a$  经过围线  $\Delta C$  的通量, 即矢流. 通量可分两部分: 一部分是经过  $r$  线的; 另一部分是经过  $\varphi$  线的. 它们分别是

$$\begin{aligned} & \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r, \varphi+\Delta\varphi)dr - \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r, \varphi)dr = \int_r^{r+\Delta r} [a_\varphi(r, \varphi+\Delta\varphi) - a_\varphi(r, \varphi)]dr \\ &= \int_r^{r+\Delta r} \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi dr = \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi \Delta r, \\ & \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r+\Delta r, \varphi)(r+\Delta r)d\varphi - \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r, \varphi)r d\varphi = \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} [a_r(r+\Delta r, \varphi)(r+\Delta r) - a_r(r, \varphi)r]d\varphi \\ &\approx \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi \approx \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta\varphi. \end{aligned}$$

且由于  $a_r, a_\varphi$  的偏导数的连续性, 当  $\Delta r, \Delta\varphi$  取得愈小时, 上述近似等式愈精确. 于是, 向量  $a$  经过  $\Delta C$  的通量为

$$\oint_{\Delta C} a \cdot n ds \approx \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta\varphi \Delta r,$$

其中  $n$  为曲线  $\Delta C$  的外法向量, 而且当  $\Delta r, \Delta\varphi$  愈小时此近似等式愈精确.

于是, 根据散度的定义, 并注意到  $\Delta S$  收缩为一点  $(r, \varphi)$  与  $\Delta r \rightarrow 0, \Delta\varphi \rightarrow 0$  等价, 从而, 即得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} a &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} a \cdot n ds}{\Delta S} = \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta\varphi \rightarrow 0}} \frac{\left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta r \Delta\varphi}{r \Delta r \Delta\varphi} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

【4434】 设  $x=f(u, v, w), y=g(u, v, w), z=h(u, v, w)$ ,

用正交曲线坐标  $u, v, w$  表示  $\operatorname{div} a(x, y, z)$ . 作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表示  $\operatorname{div} a$  的表示式.

提示 研究向量  $a$  通过以曲面  $u=\text{常数}, v=\text{常数}, w=\text{常数}$  为界的小立体(接近于长方体)  $V$  的表面  $S$  的通量.

解 考虑向量  $a$  通过由曲面  $u=\text{常数}, v=\text{常数}, w=\text{常数}$  所界的小立体(接近于长方体)  $V$  的表面  $S$  的通量(图 8.72). 我们有  $a=a_u e_1+a_v e_2+a_w e_3$ . 在  $u$  曲线上, 只有  $u$  变化( $v$  和  $w$  都是常数), 故

$$dr = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial u} dv + \frac{\partial z}{\partial u} dw.$$

从而,  $ds_1 = |dr| = L du$ , 其中

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}.$$

$ds_1$  为  $u$  曲线上的弧元素. 同理可得  $ds_2 = M dv, ds_3 = N dw$ ,

其中  $ds_2, ds_3$  分别为  $v, w$  曲线上的弧元素, 而

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}, \quad N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直,  $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$  都很小, 故  $V$  接近于长方体. 因此, 其体积为

$$V \approx \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \approx ds_1 ds_2 ds_3 = LMN du dv dw.$$

现计算  $a$  通过  $V$  的表面  $S$  向外的通量  $\iint_S a \cdot dS$ .  $S$  共包括六块小曲面(图 8.72), 记垂直于  $e_1$  方向的两块

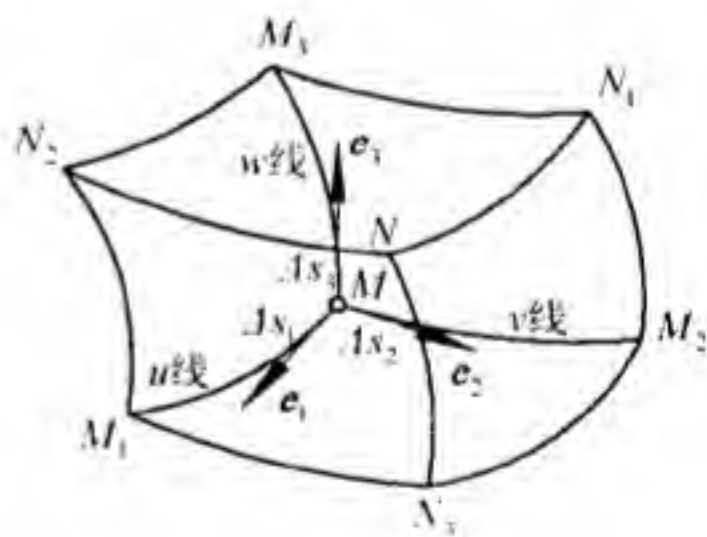


图 8.72

为  $S_1$  与  $S_2$  (即图中的  $MM_2N_1M_1$  与  $M_1N_3NN_2$ ), 垂直于  $e_2$  方向的两块为  $S_3$  与  $S_4$ , 垂直于  $e_3$  方向的两块为  $S_5$  与  $S_6$ . 显然, 由于曲面很小, 有

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_1} a_n dS &\approx a_n \Delta S_2 \Delta S_1 \Big|_{(u-\Delta u, v, w)} - a_n \Delta S_2 \Delta S_1 \Big|_{(u, v, w)} \\ &\approx a_u MN dv dw \Big|_{(u-\Delta u, v, w)} - a_u MN dv dw \Big|_{(u, v, w)} \approx \frac{\partial(a_u MN dv dw)}{\partial u} du = \frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} du dv dw. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS \approx \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} du dv dw, \quad \iint_{S_6} a_n dS + \iint_{S_5} a_n dS \approx \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w} du dv dw.$$

相加即得

$$\iint_S a_n dS \approx \left[ \frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} + \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} + \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w} \right] du dv dw.$$

于是,

$$\frac{\iint_S a_n dS}{V} \approx \frac{1}{LMN} \left[ \frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w) \right].$$

显然, 当小立体  $V$  愈缩向点  $M(V$  愈小时), 上述各近似等式都愈精确. 于是, 令  $V$  缩向  $M$  (即  $S$  的直径  $d(S)$  趋于零) 取极限, 利用 1422 题的结果, 得

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{\iint_S a_n dS}{V} = \frac{1}{LMN} \left[ \frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w) \right].$$

特别是在柱坐标情形下, 有  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$  ( $u = r, v = \varphi, w = z$ ).

从而,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, & M &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r, \\ N &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

于是,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right].$$

在球坐标情形下, 有

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (u = r, v = \theta, w = \varphi).$$

从而,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, & M &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r, \\ N &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \sin \theta. \end{aligned}$$

于是,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(a_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_\varphi r) \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}(a_r r^2) + r \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right].$$

**【4435】** 证明:

$$(1) \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}; \quad (2) \operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} u \times \mathbf{a}.$$

提示 利用旋度的定义易证.

证 (1) 设  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ , 则有

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

$$(2) \operatorname{rot}_x(u\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) = u \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \left( a_z \frac{\partial u}{\partial y} - a_y \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u \operatorname{rot}_x \mathbf{a} + (\operatorname{grad} u \times \mathbf{a})_x,$$



同法可得

$$\operatorname{rot}_y(ua) = u\operatorname{rot}_y a + (\operatorname{grad} u \times a)_y, \quad \operatorname{rot}_z(ua) = u\operatorname{rot}_z a + (\operatorname{grad} u \times a)_z.$$

于是,  $\operatorname{rot}(ua) = u\operatorname{rot} a + \operatorname{grad} u \times a$ .

**【4436】** 求: (1)  $\operatorname{rot} r$ ; (2)  $\operatorname{rot}[f(r)r]$ .

提示 (2) 利用 4435 题(2)及 4410 题的结果.

$$\text{解 (1) } \operatorname{rot} r = \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) k = 0.$$

$$(2) \operatorname{rot}[f(r)r] = f(r)\operatorname{rot} r + \operatorname{grad} f(r) \times r = 0 + f'(r) \frac{r}{r} \times r = 0.$$

\* ) 利用 4435 题(2)的结果.

\* \* ) 利用 4410 题的结果.

**【4437】** 求: (1)  $\operatorname{rot}[cf(r)]$ ; (2)  $\operatorname{rot}[c \times f(r)r]$  ( $c$  为常向量).

$$\text{解 (1) } \operatorname{rot}[cf(r)] = f(r)\operatorname{rot} c + \operatorname{grad} f(r) \times c = \frac{f'(r)}{r} (r \times c).$$

$$(2) \operatorname{rot}[c \times f(r)r] = f(r)\operatorname{rot}(c \times r) + \operatorname{grad} f(r) \times (c \times r).$$

$$\text{但是, } \operatorname{rot}(c \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_y z - c_z y & c_z x - c_x z & c_x y - c_y x \end{vmatrix} = 2c,$$

$$\operatorname{grad} f(r) \times (c \times r) = \frac{f'(r)}{r} r \times (c \times r) = \frac{f'(r)}{r} [(r \cdot r)c - (r \cdot c)r].$$

$$\text{故最后得 } \operatorname{rot}[c \times f(r)r] = 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} [(r \cdot r)c - (r \cdot c)r].$$

**【4438】** 证明:  $\operatorname{div}(a \times b) = b \cdot \operatorname{rot} a - a \cdot \operatorname{rot} b$ .

提示 利用散度及旋度的定义易证.

$$\begin{aligned} \text{证 } \operatorname{div}(a \times b) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x) \\ &= b_x \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + b_y \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + b_z \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - a_x \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) - a_y \left( \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) - a_z \left( \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \\ &= b \cdot \operatorname{rot} a - a \cdot \operatorname{rot} b. \end{aligned}$$

**【4439】** 求: (1)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$ ; (2)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a)$ .

$$\text{解 (1) } \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

$$(2) \operatorname{div}(\operatorname{rot} a) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0.$$

**【4440】** 设流体充满空间并以恒定的角速度  $w$  围绕轴  $l \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$  旋转. 求速度向量  $v$  在已知时刻在空间点  $M(x, y, z)$  处的旋度.

解  $v = v_0 + w \times r$ . 从而有

$$v_x = v_{0x} + w_y z - w_z y, \quad v_y = v_{0y} + w_z x - w_x z, \quad v_z = v_{0z} + w_x y - w_y x.$$

由于  $\operatorname{rot}_x v = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2w_x$ ,  $\operatorname{rot}_y v = 2w_y$  及  $\operatorname{rot}_z v = 2w_z$ , 故  $\operatorname{rot} v = 2w$ .

**【4441】** 求径向量  $r$  的通量: (1) 通过圆锥体  $x^2 + y^2 \leq z^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的侧表面; (2) 穿过此圆锥体的底面.



解 (1)在侧面上,点的向径的方向与圆锥的母线重合,因此,点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直,即  $r$  在法线方向上的投影  $r_n=0$ . 于是,向量  $r$  通过侧面  $D$  的通量为

$$\iint_D r_n dS = 0.$$

(2)在圆锥体的底面上,  $r_n=h$  于是,所求的通量为

$$\iint_{x^2+y^2 \leq h^2} r_n dS = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3.$$

【4442】求向量  $a=yzi+z xj+x yk$  的通量:(1)通过圆柱体  $x^2+y^2 \leq a^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的侧表面;(2)通过此圆柱的全表面.

解 先求(2),由于  $\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} a dV = \iiint_V 0 dV = 0,$

故向量  $a$  通过圆柱的全表面的通量为零.

再求(1),又由于  $S=S_{\text{侧}}+S_{\text{上、下底}}$  及在上、下底上  $a_n=xy$ ,故有

$$\iint_{S_{\text{上、下底}}} a_n dS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} xy dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr = 0.$$

于是,  $\iint_{S_{\text{侧}}} a_n dS = 0$ , 即向量  $a$  通过侧面的通量也为零.

【4443】求径向量  $r$  通过曲面  $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的通量.

解 设  $S$  为所给的曲面(锥),  $D$  为锥的底面(即  $Oxy$  平面上的圆域  $x^2+y^2 \leq 1$ ). 由于

$$\iint_S r_n dS + \iint_D r_n dS = \iiint_V \operatorname{div} r dV = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^1 dz = \pi$$

及在  $D$  上,  $r \perp n$ , 故  $r_n=0$ ,  $\iint_D r_n dS = 0$ , 从而, 得  $\iint_S r_n dS = \pi$ .

【4444】求向量  $a=x^2i+y^2j+z^2k$  通过正八分之一球面  $x^2+y^2+z^2=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  的通量.

解 设  $S$  为所给的曲面,  $S_1, S_2$  及  $S_3$  为球内三个坐标平面上的部分, 则有

$$\begin{aligned} \iint_S a_n dS + \iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} \operatorname{div} a dV = 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} (x+y+z) dx dy dz \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos\psi \cdot r (\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \cos\psi + \sin\psi) dr \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos\psi \sin\psi + \cos^2\psi (\cos\varphi + \sin\varphi)] d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} (\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

但在  $S_i (i=1, 2, 3)$  上, 显然有  $a \perp n$ , 故  $a_n=0$ . 从而,

$$\iint_{S_i} a_n dS = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

于是, 所求的通量为  $\iint_S a_n dS = \frac{3}{8} \pi$ .

【4445】求向量  $a=yi+zj+xk$  通过以平面

$$x=0, y=0, z=0, x+y+z=a \quad (a>0)$$

为界的角锥的全表面的通量. 利用奥斯特罗格拉茨基公式验证结果.

解 解法 1:

由于  $\operatorname{div} a=0$ , 故所求的通量为  $\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} a dV = 0$ .

解法 2:

如图 8.73 所示, 在平面  $z=0$  ( $S_1$ ) 上,  $n=\{0, 0, -1\}$ ; 在平面  $y=0$  ( $S_2$ ) 上,  $n=\{0, -1, 0\}$ , 在平面  $x=0$  ( $S_3$ ) 上,  $n=\{-1, 0, 0\}$ . 于是,

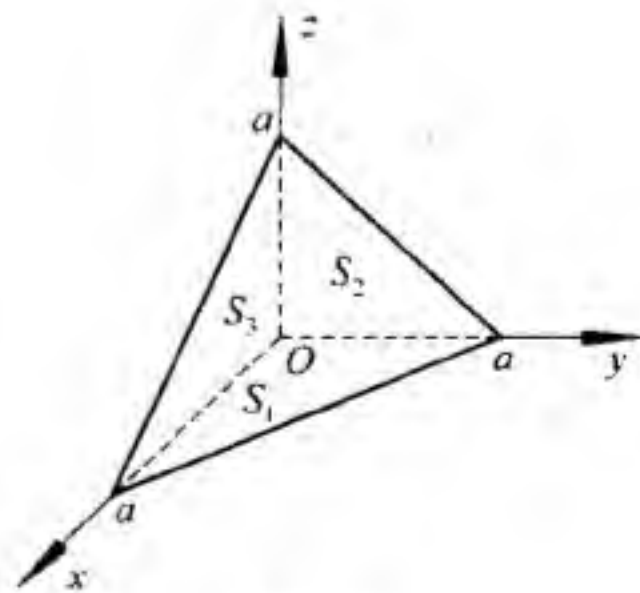


图 8.73

向量  $\mathbf{a}$  通过曲面  $S_1$  的通量为

$$\iint_{S_1} \mathbf{a}_n dS = \iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\substack{x+y+z=u \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} (-x) dx dy = -\frac{a^3}{6}.$$

同法可求得向量  $\mathbf{a}$  通过  $S_2$  及  $S_3$  面的通量也为  $-\frac{a^3}{6}$ .

对于平面  $x+y+z=u$  ( $S_4$ ), 其法向量为  $\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ , 故通量为

$$\iint_{S_4} \mathbf{a}_n dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_4} (y+z+x) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{x+y+z=u \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} a \sqrt{1^2+1^2+1^2} dx dy = \frac{a^3}{2}.$$

因此, 最后得向量  $\mathbf{a}$  通过角锥全表面的通量为

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} \mathbf{a}_n dS = \frac{a^3}{2} + 3\left(-\frac{a^3}{6}\right) = 0.$$

**【4446】** 证明: 向量  $\mathbf{a}$  通过由方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  ( $(u, v) \in \Omega$ ) 给出的曲面  $S$  的通量等于

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \iint_{\Omega} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

式中  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  的单位法向量.

证 设曲面  $S$  的方程为  $\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ ,

则有  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$ .

从而,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{k}.$$

因此, 易得

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

又  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  的方向显然是法向量  $\mathbf{n}$  的方向. 于是, 我们有

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \iint_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \sqrt{EG - F^2} \mathbf{n} du dv = \iint_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv = \iint_{\Omega} \left( \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

**【4447】** 求向量  $\mathbf{a} = m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  ( $m$  为常数) 通过围绕坐标原点的封闭曲面  $S$  的通量.

提示 利用 4392 题(2)的结果.

解 所求的通量为  $\iint_S \mathbf{a}_n dS = m \iint_S \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = m \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = m \cdot 4\pi = 4\pi m$ .

\* ) 利用 4392 题(2)的结果.

**【4448】** 已知向量  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left( -\frac{e_i}{4\pi r_i} \right)$ ,

其中  $e_i$  为常数,  $r_i$  为点  $M_i$  (点源) 距动点  $M(\mathbf{r})$  的距离. 求此向量通过围绕点  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的封闭曲面  $S$  的通量.

解 首先, 我们有  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left( -\frac{e_i}{4\pi r_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{e_i \mathbf{r}_i}{4\pi r_i^3}$ .

其次, 我们考虑这样一个空间区域  $V$ , 它由曲面  $S$  及包围点  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的  $n$  个小球所围成 (这些小球的球心在点  $M_i$ , 半径为  $\rho_i$ ). 由于  $\text{div} \mathbf{a}$  在  $V$  内为零, 故

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \mathbf{a}_n dS,$$

其中  $S_i$  为第  $j$  个小球面, 但是 
$$\iint_{S_j} a_n dS = \iint_{S_j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{e_i r_i}{4\pi r_i^3} \right) \cdot n dS.$$

由于 
$$\iint_{S_j} \frac{1}{r_i^3} (r_i \cdot n) dS = \iint_{S_j} \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^3} dS = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 4\pi, & j = i, \end{cases}$$

故得  $\iint_{S_j} a_n dS = e_j$ , 从而,  $\iint_S a_n dS = \sum_{j=1}^n e_j$ .

\* ) 利用 4392 题的结果.

【4449】 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面  $S$  是区域  $V$  的边界.

证 参看 4393 题(1).

【4450】 在温度场  $u$  内, 在单位时间内通过面微元  $dS$  的热量等于:

$$dQ = -k n \cdot \text{grad} u dS,$$

其中  $k$  为热导率,  $n$  为曲面  $S$  的单位法向量. 求在单位时间内物体  $V$  所吸收的热量. 研究温度上升的速度, 从而推出物体温度所满足的方程(热传导方程).

解 由于

$$dQ = -k n \cdot \text{grad} u dS = -k \text{grad}_n u dS,$$

故由奥式公式, 即得

$$Q = - \iint_S k \text{grad}_n u dS = - \iiint_V k \text{div}(\text{grad} u) dV.$$

因此, 每单位时间内向物体内部流入的热量为

$$\iiint_V \text{div}(k \text{grad} u) dV. \quad (1)$$

这一热量引起物体内部温度的增加, 现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间  $dt$  内温度  $u$  增加

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

需要对体积元素  $dV$  输入热量

$$c du \rho dV = c \frac{\partial u}{\partial t} \rho dt dV,$$

其中  $c$  为物体在所考察的点处的热容量. 于是, 在时间  $dt$  内整个物体就要吸收热量

$$dt \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式, 即得等式  $\iiint_V \left\{ c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(k \text{grad} u) \right\} dV = 0.$

由于上式对取在所考察境域内的任何物体  $V$  都适合, 且被积函数显见连续, 故根据 4097 题的结果, 当点属于所考察的境域时, 恒有

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} u),$$

此即所求的热传导方程.

【4451】 处于运动状态的不可压缩流体充满区域  $V$ . 假定在区域内没有源泉和漏孔, 试推出连续性方程.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0,$$

式中  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  为流体密度,  $v$  为速度向量,  $t$  为时间.

提示 研究流体通过包含在  $V$  中的任一区域  $V'$  的表面  $S'$  的流量.

解 首先, 我们已知: 在每单位时间内自  $V$  中的任一区域  $V'$  的表面  $S'$  向外流出的流量  $Q$  为



$$Q = \iint_S \rho v_n dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (1)$$

现在我们用另一法来计算  $Q$ , 如考虑到在时间  $dt$  内密度  $\rho$  增加  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ , 则立体元素  $dV$  的质量就增加  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$ , 而整个所考察的区域  $V'$  的质量就增加

$$dt \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

因此, 每单位时间内  $V'$  中质量减少

$$- \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

由于  $V$  内无源泉和漏孔, 故这个减少的质量正好就是从  $V'$  的表面  $S'$  流出的流量  $Q$ , 即

$$Q = - \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较(1)式和(2)式, 即得等式  $\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$ .

由于上式对  $V$  中任一区域  $V'$  均成立, 且被积函数连续, 故根据 4097 题的结果, 当  $(x, y, z) \in V$  时, 恒有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

**【4452】** 求向量  $\mathbf{a} = \mathbf{r}$  沿着一段螺旋线

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的环量.

**解** 由于  $d\mathbf{r} = (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}) dt$ ,  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = b^2 t dt$ , 故所求的环量为

$$W = \int_0^{2\pi} b^2 t dt = 2\pi^2 b^2.$$

**【4453】** 求向量  $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$  (其中  $f$  是连续函数) 沿着弧  $AB$  的环量.

**解** 所求的环量为  $W = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^0 ds = \int_{r_A}^{r_B} f(r)r dr$ ,

其中  $\mathbf{r}^0$  是单位切向量.

**【4454】** 求向量  $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  ( $c$  为常数) 的环量:

(1) 沿着圆周  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ ; (2) 沿着圆周  $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$ .

**解** (1) 圆  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  的径向量  $\mathbf{r}$  适合方程

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + c \mathbf{k}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) dt = dt$ ,

故所求的环量为  $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ .

(2) 对于圆  $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$ , 有

$$\mathbf{r} = (2 + \cos t)\mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = (2\cos t + 1)dt$ , 故所求的环量为  $\int_0^{2\pi} (2\cos t + 1)dt = 2\pi$ .

**【4455】** 求向量  $\mathbf{a} = \operatorname{grad}(\arctan \frac{y}{x})$  沿着围线  $C$  的环量  $\Gamma$ :

(1)  $C$  不围绕  $Oz$  轴; (2)  $C$  围绕  $Oz$  轴.

**解** 我们有

$$\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

于是, 易知  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$  (除  $x = y = 0$ , 即  $Oz$  轴上的点).

(1) 若  $C$  不围绕  $Oz$  轴, 则可于  $C$  上张一曲面  $S$ , 使  $S$  与  $Oz$  轴不相交, 于是, 根据斯托克斯公式, 得

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} dS = 0.$$

(2) 若  $C$  围绕  $Oz$  轴, 先设  $C$  正好围绕  $Oz$  轴旋转一周, 取常数  $\tau > 0$  充分小, 使  $C$  位于平面  $z = \tau$  的上方. 在平面  $z = \tau$  上围绕  $Oz$  轴取一圆周  $C_r (x^2 + y^2 = r^2, z = \tau)$  充分小, 使半径  $r$  小于  $C$  到  $Oz$  轴的距离. 以  $C$  与  $C_r$  为边界张上一曲面  $S$ , 使  $S$  与  $Oz$  轴不相交. 由斯托克斯公式, 得

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} dS = 0,$$

其中  $-C_r$  表示沿顺时针方向取向. 于是,

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}.$$

但取  $C_r$  的参数方程  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \tau$  后, 得

$$\oint_{C_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[ \left( -\frac{r \sin \theta}{r^2} \right) (-r \sin \theta) + \left( \frac{r \cos \theta}{r^2} \right) (r \cos \theta) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

从而,  $\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ .

现设  $C$  围绕  $Oz$  轴旋转了  $n$  圈. 为叙述简单起见, 假定  $n = 2$ . 在平面  $Ozx$  上引辅助线 (直线段)  $AB$ , 将  $C$  分解成两个只绕  $Oz$  轴转一周的闭曲线

$$C_1 = ABMA \quad \text{与} \quad C_2 = ANBA$$

(图 8.74). 根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi, \quad \oint_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

于是, 注意到  $\overline{AB}$  的曲线积分 (第二型) 与  $\overline{BA}$  上的曲线积分相消, 即得

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi.$$

完全类似地, 可得一般情况 ( $C$  围绕  $Oz$  轴旋转  $n$  圈) 时, 有

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n.$$

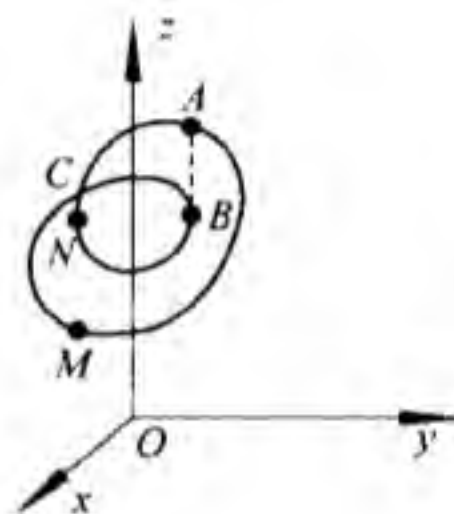


图 8.74

**【4456】** 平面的不可压缩定常流由速度向量

$$\mathbf{w} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$$

描述, 试确定: (1) 经过区域  $S$  的边界 (封闭围线)  $C$  流出的流体的量  $Q$  (流量); (2) 速度向量沿着围线  $C$  的环量  $\Gamma$ . 若流场无源泉、无漏孔且无旋度, 则函数  $u$  和  $v$  满足怎样的方程?

**解** (1) 考虑包含着点  $D(x, y)$  的两边长分别为  $\Delta x$  与  $\Delta y$  的小矩形元  $ABCD$  (图 8.75).

在单位时间内沿  $Ox$  轴方向从  $AD$  边流入的量为  $u(x, y)\Delta y$  (为简单起见, 设密度  $\rho = 1$ ), 而同时从  $BC$  边流出的量为  $u(x + \Delta x, y)\Delta y$ . 于是, 在单位时间内, 沿  $Ox$  轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x \Delta y} \Delta y.$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 此比值的极限  $\frac{\partial u}{\partial x}$  就是在点  $(x, y)$  沿  $Ox$  轴方向的发散强度.

类似地,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  就是在点  $(x, y)$  沿  $Oy$  轴方向的发散强度. 于是, 在点  $(x, y)$  处流体的发散强度为  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ , 而对于面积元  $dxdy$  的流量即为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

因此, 总的流量为

$$Q = \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

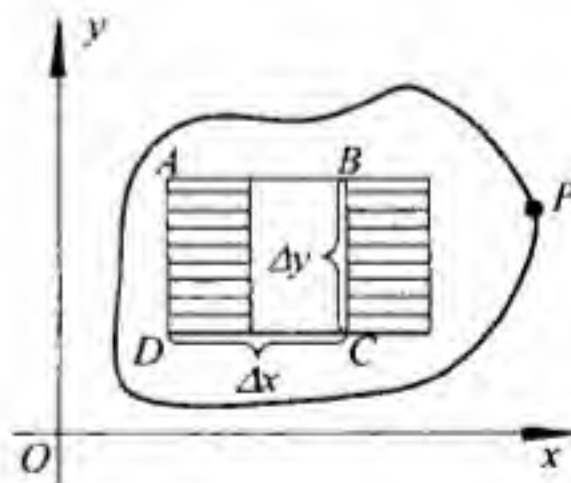


图 8.75



另一解法:令点  $P$  为围线  $C$  上的任一点,  $n$  为向外法向量, 考虑曲线元素  $ds$ . 单位时间内通过  $ds$  弧段的流量为

$$dQ = w_n ds.$$

其中  $w_n$  为点  $P$  处的流速  $w$  在法向量  $n$  上的投影:  $w_n = w \cdot n$ . 于是, 所求的通过曲线  $C$  的流量为

$$Q = \int_C w_n ds.$$

但是,  $w_n = w \cdot n = u \cos(n, x) + v \cos(n, y) = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds}$ , 故得

$$Q = \int_C u dy - v dx.$$

应用格林公式, 即得

$$Q = \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

(2)  $d\Gamma = w \cdot dr = u dx + v dy$ , 故

$$\Gamma = \int_C u dx + v dy = \iint_S \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

若流场无源泉、无漏孔及无旋度, 则对于流场中任何围线  $C$  及其所包围的区域  $S$ , 均有

$$Q = 0 \quad \text{及} \quad \Gamma = 0.$$

于是, 在流场中的每一点, 均有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{及} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

这就是  $u, v$  所应满足的方程.

\* ) 作者注: 从原书答案来看, 本题叙述有误. 最后的问题中“流体是不可压缩”应改为“流场无源泉、无漏孔”, 而在题目开始, 应假定流体不可压缩.

\*\* ) 参看 4323 题的推导.

**【4457】** 证明: 场  $a = yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k$  是有势场, 并求这个场的势.

提示 只要证明  $\text{rota} = 0$ . 又由势  $u$  满足  $du = a \cdot dr$ , 可得  $u = xyz(x+y+z) + C$ , 其中  $C$  为任意常数.

解 由于对空间任一点  $(x, y, z)$  均有

$$\begin{aligned} \text{rota} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y+2z)] - \frac{\partial}{\partial z}[xz(x+2y+z)] \right\} i + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}[yz(2x+y+z)] - \frac{\partial}{\partial x}[xy(x+y+2z)] \right\} j \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[xz(x+2y+z)] - \frac{\partial}{\partial y}[yz(2x+y+z)] \right\} k \\ &= 0, \end{aligned}$$

故  $a$  为有势场.

又由于势  $u$  满足

$$\begin{aligned} du &= a \cdot dr = yz(2x+y+z)dx + xz(x+2y+z)dy + xy(x+y+2z)dz \\ &= xyz(dx+dy+dz) + (x+y+z)(yzdx + zxdy + xydz) = xyzd(x+y+z) + (x+y+z)d(xyz) \\ &= d[xyz(x+y+z)], \end{aligned}$$

故势  $u = xyz(x+y+z) + C$ , 其中  $C$  为任意常数.

**【4458】** 求由位于坐标原点的质量  $m$  所产生的引力场  $a = -\frac{m}{r^3}r$  的势.

解 由于  $du = a \cdot dr = -\frac{m}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -\frac{m}{2r^3}d(r^2) = -\frac{m}{r^2}dr = d\left(\frac{m}{r}\right)$ ,

故势  $u = \frac{m}{r} + C$  ( $C$  为任意常数). 通常取  $u = \frac{m}{r}$  ( $r \neq 0$ ).

**【4459】** 求质量  $m_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的质点位于点  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 求此质点系所产生的引力场的势.

解 引力场  $a = -\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} r_i$ , 其中  $r_i$  为动点  $M$  与  $M_i$  之间的距离. 由于



$$du = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势  $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} + C$  ( $C$  为任意常数), 通常取  $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$ .

**【4460】** 证明: 场  $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$  (其中  $f(r)$  是单值连续函数) 是有势场, 求这个场的势.

解 利用 4436 题(2)的结果, 即知  $\text{rot}(f(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , 故  $\mathbf{a}$  为有势场. 又由于

$$du = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = xf(r)dx + yf(r)dy + zf(r)dz = \frac{1}{2}f(r)d(r^2) = rf(r)dr,$$

故势  $u = \int_{r_0}^r f(t)dt$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**【4461】** 证明公式:  $\text{grad}_P \left( \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right) = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r},$

其中  $S$  为区域  $V$  的边界曲面,  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  的外法向量,  $r$  为点  $P(x, y, z)$  与点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  之间的距离.

证 首先指出, 题中需假定  $\rho(Q)$  在  $V$  上具有连续的导数.

(I) 先设点  $P(x, y, z)$  在  $V$  之外, 令

$$f(x, y, z) = \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r}. \quad (1)$$

显然, 右端积分的被积函数对参变量  $x, y, z$  都具有连续的偏导数, 故可在积分号下求导数, 得

$$\text{grad}_P f = \iiint_V \rho(Q) \text{grad}_P \frac{1}{r} dV. \quad (2)$$

又由于

$$\text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\text{grad}_Q \frac{1}{r}, \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{QP}$$

代入(2)式, 得

$$\text{grad}_P f = - \iiint_V \rho(Q) \text{grad}_Q \frac{1}{r} dV. \quad (3)$$

在公式(4408 题(4))  $\text{grad}_Q(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}_Q \psi + \psi \text{grad}_Q \varphi$  中, 令  $\varphi = \rho(Q)$ ,  $\psi = \frac{1}{r}$ , 再代入(3)式, 得

$$\text{grad}_P f = - \iiint_V \text{grad}_Q \left( \frac{\rho(Q)}{r} \right) dV + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}. \quad (4)$$

根据奥氏公式, 有

$$\iiint_V \text{grad}_Q \left( \frac{\rho(Q)}{r} \right) dV = \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r}. \quad (5)$$

将上式代入(4), 即得

$$\text{grad}_P f = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}.$$

(II) 现设点  $P(x, y, z)$  在  $V$  的内部. 仍按(1)式令  $f(x, y, z)$ . 注意, 这时(1)式右端的积分为广义重积分 (点  $P$  为瑕点); 但易知它收敛, 因为在以  $P$  点为中心,  $\epsilon$  为半径的球域  $V_\epsilon$  上的积分满足 ( $M = \max_{Q \in V} |\rho(Q)|$ )

$$\left| \iiint_{V_\epsilon} \frac{\rho(Q)}{r} dV \right| \leq \iiint_{V_\epsilon} \frac{|\rho(Q)|}{r} dV \leq M \iiint_{V_\epsilon} \frac{dV}{r} = M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\epsilon \frac{r^2}{r} dr = 2M\pi\epsilon^3 \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow +0).$$

我们证明: 这时仍可将(1)式的积分在积分号下求导数而得(2)式. 事实上, 由于

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{V_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} dV \right| &\leq \iiint_{V_\epsilon} \left| \rho(Q) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} \right| dV = \iiint_{V_\epsilon} \left| -\rho(Q) \frac{x-\xi}{r^3} \right| dV \leq M \iiint_{V_\epsilon} \frac{dV}{r^2} \\ &= M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\epsilon \frac{r^2}{r^2} dr = 4M\pi\epsilon, \end{aligned}$$

故积分  $\iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} dV$  关于  $x$  一致收敛. 于是, (1)式右端的积分可在积分号下关于  $x$  求偏导数, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} dV. \quad (6)$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial y} dV. \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial z} dV. \quad (8)$$

由(6),(7),(8)三式,即得(2)式,仿(Ⅰ)段办法,可得(3)式与(4)式(注意,仿前,可知(4)式右端两个积分都收敛),但不能直接对 $V$ 应用奥式公式而得(5)式,因为有点 $P$ ,但显然可对 $V-V_\epsilon$ 应用奥式公式,得

$$\iiint_{V-V_\epsilon} \operatorname{grad}_Q \left( \frac{\rho(Q)}{r} \right) dV = \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} \quad (9)$$

其中 $S_\epsilon$ 为球域 $V_\epsilon$ 的边界(球面),在 $S_\epsilon$ 上的 $\mathbf{n}$ 是指向点 $P$ 的,由于

$$\left| \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \mathbf{n} \frac{dS}{r} \right| \leq \sqrt{3} \iint_{S_\epsilon} |\rho(\theta)| \frac{dS}{r} \leq \sqrt{3} M \iint_{S_\epsilon} \frac{dS}{r} = \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} \iint_{S_\epsilon} dS = \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} 4\pi\epsilon^2 = 4\sqrt{3}\pi M\epsilon,$$

故 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \mathbf{n} \frac{dS}{r} = 0$ . 于是,在(9)式两端令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限,即得(5)式. 以(5)式代入(4)式,最后得所要证的公式

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(\theta) \frac{dV}{r} \right\} = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}.$$

证毕.

**【4462】** 证明:若 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$ , 其中

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2},$$

则 $\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z)$  (假定相应的积分有意义).

**证** 首先指出,为保证题述的广义重积分(既是无穷积分,又是瑕积分)的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性,一般我们需假定: $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ 在全空间具有连续的偏导数,并且当 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ 充分大时( $R \geq R_0$ ),有

$$|\rho(\xi, \eta, \zeta)| \leq \frac{M}{R^{2+a}}, \quad (1)$$

其中 $M > 0, a > 0$ ,是两个常数.

考虑空间任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,用 $V_0$ 表示以 $P_0$ 为中心,1为半径的单位球域,我们先限制点 $P(x, y, z)$ 只在 $V_0$ 中变动,又用 $V_1$ 表示以 $P_0$ 为中心,2为半径的球域, $V_2$ 表示整个空间去掉 $V_1$ 所剩下的部分(无界域),令

$$u_1(x, y, z) = \iiint_{V_1} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2)$$

$$u_2(x, y, z) = \iiint_{V_2} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3)$$

$$\text{于是,} \quad u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} [u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z)], \quad (4)$$

(2)式右端为瑕积分,在4461题证明的第(Ⅱ)段中已证它是收敛的;(3)式右端为无穷积分,下面证明它收敛. 令

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\},$$

则当 $R \geq R_1$ 时,有 $R \geq R_0$ (从而,(1)式满足),且 $R \geq 2(r_0 + 1)$ . 以 $Q$ 表示点 $(\xi, \eta, \zeta)$ , $O$ 表示原点 $(0, 0, 0)$ . 由于三角形两边之和大于第三边,故(注意 $P \in V_0$ ),

$$R = \overline{OQ} \leq \overline{OP} + \overline{PQ} \leq r_0 + 1 + r \leq \frac{R}{2} + r,$$



从而,

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_1^2} \left| \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \right| d\xi d\eta d\zeta \leq M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r R^{2+a}} \leq 2M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+a}} \\ & = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{R^2}{R^{3+a}} dR = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{dR}{R^{1+a}} = \frac{8M\pi}{aR_1^a} < +\infty, \end{aligned} \quad (5)$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由(4)式知  $u(x, y, z)$  有定义. 由于  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$ , 故我们只要证明

$$\Delta u = \rho(x, y, z). \quad (6)$$

我们证明(3)式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (8)$$

为此, 只要证明(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于  $(x, y, z) \in V_0$  一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导, 可得: 当  $R_2 > R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$  时, 对一切  $(x, y, z) \in V_0$ , 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \leq M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3 R^{2+a}} \leq 4M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{4+a}} = \frac{16M\pi}{(1+a)R_2^{1+a}}, \\ & \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \leq 4M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3 R^{2+a}} \leq 32M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{5+a}} = \frac{128M\pi}{(1+a)R_2^{2+a}}. \end{aligned}$$

由此可知, (7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于  $(x, y, z) \in V_0$  一致收敛. 因此, (7)式与(8)式当  $(x, y, z) \in V_0$  时成立. 同理可证, 当  $(x, y, z) \in V_0$  时, 有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^3}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (10)$$

将(8), (9), (10)三式相加, 即得(注意到  $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$ )

$$\Delta u_2 = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta \left( \frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \quad (11)$$

下面再求  $\Delta u_1 = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1)$ . 由 4461 题的结果知

$$\operatorname{grad} u_1 = - \iint_{S_1} \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \quad (12)$$

其中  $S_1$  表示  $V_1$  的边界(球面). 显然, 当  $P(x, y, z) \in V_0$  时, (12)式右端的第一个积分(曲面积分)的被积函数具有对于  $x, y$  及  $z$  的连续偏导数, 故可在积分号下求对于  $x, y$  及  $z$  的偏导数. 另外, 仿照 4461 题(ii)段之证可知(12)式右端的第二个积分(三重积分)也可在积分号下求对于  $x, y$  及  $z$  的偏导数. 于是, 得

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = - \iint_{S_1} \operatorname{div}_P \left[ \frac{\rho(Q) \mathbf{n}}{r} \right] dS + \iiint_{V_1} \operatorname{div}_P \left[ \frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] dV. \quad (13)$$

利用公式  $\operatorname{div}(va) = v \operatorname{div} a + a \cdot \operatorname{grad} v$  (4424 题(3)), 可知(注意到  $\rho(Q) \mathbf{n}$  及  $\operatorname{grad}_Q \rho(Q)$  均与  $P$  无关)

$$\operatorname{div}_P \left[ \frac{\rho(Q) \mathbf{n}}{r} \right] = \rho(Q) \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_P \left( \frac{1}{r} \right) = -\rho(Q) \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) = -\rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right),$$

$$\operatorname{div}_P \left[ \frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] = \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_P \left( \frac{1}{r} \right) = -\operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right).$$

代入(13)式, 得



$$\Delta u_1 = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) dV. \quad (14)$$

由于

$$\operatorname{div}_Q \left[ \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) \right] = \rho(Q) \Delta_Q \left( \frac{1}{r} \right) + \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right),$$

而  $\Delta_Q \left( \frac{1}{r} \right) = 0$  ( $Q \neq P$ ), 故(14)式可写为

$$\Delta u_1 = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[ \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV. \quad (15)$$

下面计算(15)式中的三重积分, 用  $\Omega_\epsilon$  表示以点  $P(x, y, z)$  为中心,  $\epsilon$  为半径的球域, 其边界(球面)记为  $S_\epsilon$ . 对  $V_1 - \Omega_\epsilon$  应用奥氏公式, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[ \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV &= \iint_{S_1 - S_\epsilon} \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\boldsymbol{n}$  是向外法向量, 从而, 在  $S_\epsilon$  上是指向点  $P(x, y, z)$  的. 由中值定理知,

$$\begin{aligned} \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS &= - \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) dS = - \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{dS}{r^2} = - \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \rho(Q_\epsilon) \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi\rho(Q_\epsilon), \end{aligned}$$

其中  $Q_\epsilon$  是球面  $S_\epsilon$  上的某一点. 代入(16)式, 得

$$\iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[ \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(Q_\epsilon).$$

两端令  $\epsilon \rightarrow +0$  取极限, 得

$$\iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[ \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(P),$$

再以此式代入(15)式, 得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x, y, z). \quad (17)$$

由(17)式, (11)式以及(4)式, 即得(6)式. 于是, (6)式对一切点  $P(x, y, z) \in V_0$  成立. 由于  $V_0$  的中心  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是任意的(可为空间任一点), 故知(6)式对空间任一点都成立. 证毕.